UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL
QA1 .M87

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

64. BAND, 1. HEFT
(AUSGEGEBEN IM JANUAR 1960)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1960

Moh. Math.
QA1
M877
v.64

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX. Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

64. Band./1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Fieber, H. Zu den Lagrange'schen Lösungen des n-Körperproblems 1

Izbicki, H. Reguläre Graphen beliebigen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften 15

Hejtmanek, J. Ausgezeichnete Gitter eines Sternkörpers 22

Mirsky, L. An Algorithm Relating to Symmetric Matrices 35

Weier, J. Homologiebedingungen zweiter und dritter Ordnung für die Wesentlichkeit einer Abbildung 39

Ostrowski, A. Über geränderte Determinanten und bedingte Trägheitsindizes quadratischer Formen 51

Sabidussi, G. Graphs with Given Infinite Group 64

Zaremba, S. K. A Test of Fit for the Spectral Density Function of a Stochastic Process 68

Buchbesprechungen 80

Zu den Lagrange'schen Lösungen des n-Körperproblems

Von

H. Fieber, Wien

(Eingegangen am 27. August 1958)

Für das n-Körperproblem der Newton'schen Gravitationskraft ist von besonderem Interesse das schon von *L. Euler* [1] und *J. L. Lagrange* [2] gestellte und teilweise gelöste Problem, diejenigen Bewegungen von n Körpern zu ermitteln, bei denen diese stets ähnliche Figuren bilden. *Lagrange* zeigte, daß für drei Körper dies nur dann möglich ist, wenn sie sich entweder auf einer Geraden oder als Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bewegen.

C. Caratheodory [3] hat die einigermaßen überraschende Tatsache aufgezeigt, daß im dreidimensionalen Raum die Bewegung nur längs Gerader durch den Schwerpunkt erfolgen kann. Daß andere Lagrangesche Bewegungen unmöglich sind, geht aus der mechanischen Überlegung hervor, wonach die Resultierenden der Anziehungskräfte alle parallel einer festen Ebene sind, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß nicht alle Körper in einer Ebene liegen. In Anlehnung an die Arbeit *Caratheodorys* gewinnt auch *G. Hamel* [4] bei Einführung des „begleitenden starren Körpers" dieses Resultat. Auch *C. L. Siegel* [5] hat u. a. das Problem der stets ähnlichen Bewegungen behandelt.

In dieser Arbeit wird nun das Lagrange'sche Problem in einem r-dimensionalen Raum mit n Massenpunkten rein analytisch untersucht. Einschränkend wird hiebei im Wesentlichen vorausgesetzt, daß die Streckung $q(t)$ so beschaffen ist, daß $0 < Q < q(t)$ und $\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{q(\tau)}$ divergiert. Sind dann alle Massen mit dem gleichen Vorzeichen behaftet, so können nichttriviale Lagrange'sche Lösungen nur in Räumen gerader Dimension auftreten. Die Bahnen der Körper stellen sich als ebene Kegelschnitte dar, oder liegen auf 2 m-dimensionalen Kugeln. Hier ergibt sich auch die

Möglichkeit einfach zu entscheiden, ob eine vorgegebene Konfiguration zu einer Lagrange'schen Bewegung Anlaß geben kann.

1. In einem r-dimensionalen euklidischen Raum E_r seien n Massenpunkte P_k $(k=1, \ldots, n)$ mit $n > r \geqq 2$ gegeben. Die Ortsvektoren der P_k in einem, im Schwerpunkt des Systems verankerten kartesischen Koordinatensystem, mögen durch $\mathfrak{x}_k(t) = (x_1^{(k)}(t), \ldots, x_r^{(k)}(t))$ bezeichnet werden. Ferner sei die zum Punkte P_k gehörige Masse $m_k \neq 0$ und alle m_k beliebig vorgegeben. Dann lauten die Bewegungsgleichungen im Falle, daß nur Newton'sche Anziehungskräfte zwischen ihnen herrschen

$$\ddot{\mathfrak{x}}_i = \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_i|^3} (\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_i) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{1}$$

Die Anfangswerte zur Zeit $t = t_0$

$$\mathfrak{x}_k(t_0) = \mathfrak{v}_k, \ \dot{\mathfrak{x}}_k(t_0) = \mathfrak{w}_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

können beliebig vorgegeben werden, wenn nur

$$|\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i| > 0 \ \ (i, k = 1, \ldots n, i \neq k).$$

Es werde jedoch für das Folgende die Voraussetzung gemacht, daß r der Vektoren $\mathfrak{v}_k$ linear unabhängig seien. Unter den Lagrange'schen Lösungen versteht man nun jene speziellen Lösungen von (1), bei denen die Konfiguration der n Körper für alle Zeiten t ähnlich ist, daß also

$$\mathfrak{x}_k(t) = q(t)\, \mathfrak{A}(t)\, \mathfrak{v}_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

wenn $q(t)$ eine skalare Funktion und $\mathfrak{A}(t)$ eine orthogonale Matrix, d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A}^*$ als der transponierten Matrix zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ der Einheitsmatrix, darstellt. Damit erhält man für das System (1)

$$q^2 \mathfrak{A}^{-1}(q\mathfrak{A})^{\cdot\cdot} \mathfrak{v}_i = \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i|^3} (\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

In diesem System sind die rechten Seiten von t unabhängig, also auch die linken Seiten, so daß die Matrix

$$\mathfrak{B} = q^2 \mathfrak{A}^{-1}(q\,\mathfrak{A})^{\cdot\cdot}$$

konstante Elemente besitzen muß. Dieser Schluß ist auf Grund der Linearunabhängigkeit von r Vektoren $\mathfrak{v}_k$ zulässig, da dann die Matrix $\mathfrak{B}$, falls sie überhaupt existiert, eindeutig festgelegt werden kann. $\mathfrak{B}$ ist dann auch regulär. Dazu ist nur zu zeigen, daß die Vektoren

$$\mathfrak{a}_i = \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i|^3} \mathfrak{v}_k - \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i|^3} \mathfrak{v}_i \qquad (i=1, 2, \ldots r)$$

linear unabhängig sind. Bildet man das äußere Produkt von r Vektoren $\mathfrak{a}_i$, so ist

$$\mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_r = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i|^3} \right) \mathfrak{v}_1 \wedge \mathfrak{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{v}_r$$

und das ist sicher ungleich Null, wenn die m_k alle von einerlei Vorzeichen sind und die $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r$ linear unabhängig sind. Der Voraussetzung entsprechend kann dies durch geeignete Nummerierung stets erreicht werden. Dann folgt aber nach dem Multiplikationssatz für Matrizen, daß $\mathfrak{B}$ regulär ist.

Somit zerfällt das Lagrange'sche Problem in zwei miteinander verschränkte Aufgaben [5]:

1. In eine rein algebraische, nämlich die Auflösung des Systems

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}_i = \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{|\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i|^3} (\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

   in welchem die Konfiguration $\mathfrak{v}_k$, die Massen m_k und die Matrix $\mathfrak{B}$ enthalten sind.

2. In eine analytische

$$\mathfrak{B} = q^2\, \mathfrak{A}^{-1} (q\, \mathfrak{A})^{\cdot\cdot}, \tag{4}$$

   welche die konstante Matrix $\mathfrak{B}$ und die zeitabhängig Matrix $\mathfrak{A}(t)$, sowie die Funktion $q(t)$ enthält.

Bei der analytischen Seite des Problems werden sich Aussagen über $\mathfrak{B}$ ergeben und naturgemäß die Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ bzw. q und der Zeit t.

2. Gleichung (4) schreibt sich ausführlich unter Berücksichtigung von $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^{-1}$ in der Form

$$q^2 \ddot{q}\, \mathfrak{E} + 2\, q^2\, \dot{q}\, \mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} + q^3\, \mathfrak{A}^* \ddot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$$

und daher ihre transponierte,

$$q^2\, \ddot{q}\, \mathfrak{E} + 2\, q^2\, \dot{q}\, \dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A} + q^3\, \ddot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A} = \mathfrak{B}^*$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man einerseits

$$2\, q^2\, \ddot{q}\, \mathfrak{E} + 2\, q^2\, \dot{q} (\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} + \dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A}) + q^3 (\mathfrak{A}^* \ddot{\mathfrak{A}} + \ddot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}^* \tag{5}$$

und findet andererseits durch Subtraktion

$$2\, q^2\, \dot{q} (\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} - \dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A}) + q^3 (\mathfrak{A}^* \ddot{\mathfrak{A}} - \ddot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}^* \tag{6}$$

Beachtet man die aus der Orthogonalität von $\mathfrak{A}$ folgenden Relationen

$$\dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} = 0$$

$$\mathfrak{A}^* \mathfrak{A} + 2\,\dot{\mathfrak{A}}^* \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{A}^* \ddot{\mathfrak{A}} = 0$$

so wird aus (5)

$$q^2 \ddot{q}\, \mathfrak{E} - q^3 \dot{\mathfrak{A}}^* \dot{\mathfrak{A}} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^*) = \overline{\mathfrak{B}}$$

und daher, wenn nur solche $q(t)$ zugelassen werden, für die $0 < Q < q(t)$,

$$\dot{\mathfrak{A}}^* \dot{\mathfrak{A}} = \frac{\ddot{q}}{q}\,\mathfrak{E} - \frac{1}{q^3}\,\overline{\mathfrak{B}} \tag{7}$$

Ferner folgt wegen

$$\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} - \dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} - \dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A})^{\cdot} = 2(\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}})^{\cdot}$$

schließlich aus (6)

$$2\,q^2 \dot{q}\, \mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} + q^3 (\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}})^{\cdot} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^*) = \hat{\mathfrak{B}}$$

und daraus

$$(q^2\, \mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}})^{\cdot} = \frac{1}{q}\,\hat{\mathfrak{B}}$$

oder

$$\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{q^2}\,[\hat{\mathfrak{B}} \int \frac{dt}{q} + \mathfrak{C}] \tag{8}$$

wobei $\mathfrak{C}$ eine konstante schiefsymmetrische Matrix bedeutet. Deren Schiefsymmetrie folgt aus

$$\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} = -\,\dot{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{A} = -\,(\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}})^*$$

Setzt man nun voraus $0 < Q_1 < q(t) < Q_2$, betrachtet also u. a. die periodischen Lösungen, und weiters

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{q(\tau)} \text{ divergent} \tag{9}$$

so gilt im Falle $\hat{\mathfrak{B}} \neq 0$ für mindestens ein Indexpaar $i \neq l$:

$$\sum_{j=1}^{r} |\, a_{ji}\, \dot{a}_{jl} \,| \to \infty \text{ für } t \to \infty.$$

Wegen der Beschränktheit der a_{rs} für alle r, s strebt somit

$$\sum_{j=1}^{r} |\, \dot{a}_{jl} \,| \to \infty \text{ für } t \to \infty.$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit des k-ten Massenpunktes gegeben durch

$$\dot{\mathfrak{x}}_k = \dot{q}\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{v}_k + q\, \dot{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{v}_k$$

wobei die Vektoren $\mathfrak{A}\, \mathfrak{v}_k$ und $\dot{\mathfrak{A}}\, \mathfrak{v}_k$ senkrecht zu einander stehen; denn wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{A}$ ist

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}_k, \dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{v}_k) = \sum_{i,j,l=1}^{r} a_{ij}\,\dot{a}_{il}\,v_j^{(k)}\,v_l^{(k)} = -\sum_{i,j,l=1}^{r} a_{ij}\,\dot{a}_{il}\,v_j^{(k)}\,v_l^{(k)}$$

und daher

$$\sum_{i,j,l=1}^{r} a_{ij}\,\dot{a}_{il}\,v_j^{(k)}\,v_l^{(k)} = 0$$

Dann wird

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,\dot{\xi}_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k\,[\dot{q}^2 \sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}\,v_j^{(k)})^2 + q^2 \sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{r} \dot{a}_{ij}\,v_j^{(k)})^2].$$

Setzt man hierin

$$\dot{a}_{ij} = \sqrt{\sum_{m=1}^{r} \dot{a}_{im}^2}\;\xi_j^{(i)}$$

bei festem i und bildet

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,(\sum_{j=1}^{r} \xi_j^{(i)}\,v_j^{(k)})^2$$

so ist dieser Ausdruck für jedes i größer Null, wenn die gegebenen Massen $m_k > 0$; er ist gleich Null nur dann, wenn für alle k gilt $\sum_{j=1}^{r} \xi_j^{(i)}\,v_j^{(k)} = 0$. Da aber r Vektoren $\mathfrak{v}_k$ als linear unabhängig vorausgesetzt wurden, ist dies unmöglich. Faßt man weiters

$$F = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(\sum_{j=1}^{r} \xi_j\,v_j^{(k)})^2$$

als Funktion der ξ_j auf und bildet das Minimum bezüglich der Gesamtheit der Einheitsvektoren $\mathfrak{\xi}$, so gilt auch $\mathrm{Min}(F) > 0$; dann wird aber

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} m_k\,(\sum_{j=1}^{r} \dot{a}_{ij}\,v_j^{(k)})^2 > \mathrm{Min}(F) \sum_{j=1}^{r}(\sum_{i=1}^{r} \dot{a}_{ij}^2)$$

und strebt für $t \to \infty$ über alle Grenzen. Das ist jedoch des Energiesatzes wegen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2}\,\dot{\xi}_k^2 - \sum_{k<l} \frac{m_k\,m_l}{q\,|\,\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_l\,|} = \mathrm{const.}$$

unmöglich. Daher sind nur dann beschränkte Lagrange'sche Lösungen möglich, wenn $\mathfrak{B} = 0$, d. h. $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$ ist.

Setzt man hingegen umgekehrt $\mathfrak{B} = 0$ voraus, ohne sich auf Lösungen obiger Art zu beschränken, so zeigt sich ebenfalls die Gültigkeit von (9). Es ist daher zu vermuten, daß (9) stets $\mathfrak{B} = 0$ nach sich

zieht. Für $r < 4$ ist das auch noch verhältnismäßig leicht zu bestätigen; die Fälle $r \geqq 4$ sollen in einer späteren Arbeit untersucht werden.

Im Falle nichtbeschränkten $q(t)$ kann man aus (9) und $\hat{\mathfrak{B}} \neq 0$ nicht auf die Nichterfüllbarkeit des Energiesatzes schließen. Dafür liefert der Flächensatz eine Aussage. Bezeichnet man mit $(\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{w})$ die schiefsymmetrische Matrix der Elemente des äußeren Produktes, so gilt, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei (r, r)-Matrizen sind

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{w})\,\mathfrak{N}^* + \mathfrak{N}(\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{w})\,\mathfrak{M}^* = (\mathfrak{M}\,\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{N}\,\mathfrak{w}) + (\mathfrak{N}\,\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{M}\,\mathfrak{w})$$

Ist speziell $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \mathfrak{A}^*$, so folgt $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{w})\,\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^*\,\mathfrak{v} \wedge \mathfrak{A}^*\,\mathfrak{w})$. Wendet man dies auf den Flächensatz

$$(\sum_{k=1}^{n} m_k q^2\, \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}_k \wedge \dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{v}_k) = \mathfrak{S}$$

wobei $\mathfrak{S}$ eine schiefsymmetrische, konstante Matrix bedeutet, an, so folgt

$$(\sum_{k=1}^{n} m_k q^2\, \mathfrak{v}_k \wedge \mathfrak{A}^*\dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{v}_k) = \mathfrak{A}^*\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{A}$$

und daraus wegen (8),

$$\int \frac{dt}{q}\,(\sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathfrak{v}_k \wedge \hat{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{v}_k) = \mathfrak{A}^*\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{A} - (\sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathfrak{v}_k \wedge \mathfrak{C}\,\mathfrak{v}_k)$$

Die linke Seite dieser Gleichung strebt nun für $t \to \infty$ über alle Grenzen, die rechte Seite bleibt aber beschränkt. Also ist diese Relation nur gültig, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathfrak{v}_k \wedge \hat{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{v}_k = 0$$

oder

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \hat{b}_{i\varrho}\,(\sum_{k=1}^{n} m_k\, v_j^{(k)}\, v_\varrho^{(k)}) - \sum_{\varrho=1}^{r} \hat{b}_{j\varrho}\,(\sum_{k=1}^{n} m_k\, v_i^{(k)}\, v_\varrho^{(k)}) = 0, \quad (i < j) \tag{10}$$

Im Falle $r = 2$ stellt (10) nur die eine Gleichung

$$\hat{b}_{12} \sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathfrak{v}_k^2 = 0$$

dar und hat für alle m_k von einerlei Vorzeichen, $\hat{b}_{12} = 0$ zur Folge.

Im Falle $r = 3$ ist die Gleichungsdeterminante D des in den $\hat{b}_{ik}$ linearen und homogenen Gleichungssystems

$$D = \begin{vmatrix} d_{11}+d_{22} & d_{23} & -d_{13} \\ d_{23} & d_{11}+d_{33} & d_{12} \\ -d_{13} & d_{12} & d_{22}+d_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (d_{11}+d_{22})(d_{11}d_{22}-d_{12}^2)+(d_{11}+d_{33})(d_{11}d_{33}-d_{13}^2)+$$
$$+(d_{22}+d_{33})(d_{22}d_{33}-d_{23}^2)+2(d_{11}d_{22}d_{33}-d_{12}d_{13}d_{23})$$

wenn

$$d_{ij} = d_{ji} = \sum_{k=1}^{n} m_k v_i^{(k)} v_j^{(k)}$$

bedeutet. Dabei ist $d_{jj} \neq 0$ bei gleichem Vorzeichen aller m_k und nur gleich Null, wenn alle $v_j^{(k)} = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Letzteres ist aber wegen der Linearunabhängigkeit von drei Vektoren $\mathfrak{v}_k$ unmöglich. Ferner ist

$$d_{ii}d_{jj} - d_{ij}^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} m_k m_l (v_i^{(k)} v_j^{(l)} - v_i^{(l)} v_j^{(k)})^2 > 0$$

und nur gleich Null, wenn $v_i^{(k)} = \lambda v_j^{(k)}$ für jedes k; wegen der Linearunabhängigkeit von drei Vektoren ist das jedoch nicht möglich. Damit folgt aber auch

$$\operatorname{sgn}(d_{11}d_{22}d_{33} - d_{12}d_{13}d_{23}) = \operatorname{sgn}(d_{jj})$$

und diese Differenz ist von Null verschieden. Also gilt $D \neq 0$, das Gleichungssystem besitzt daher nur die triviale Lösung, d. h. $\mathfrak{B} = 0$.

3. Im Weiteren werde nun $\mathfrak{B}=0$ vorausgesetzt. Damit lautet Gleichung (8)

$$\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{q^2}\mathfrak{C} \tag{11}$$

Berechnet man nun aus (11) die Größe $\dot{\mathfrak{A}}$ und setzt sie in (7) ein, so folgt eine Relation zur Bestimmung der Funktion $q(t)$

$$\dot{\mathfrak{A}}^* \dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{q^4}(\mathfrak{A}\mathfrak{C})^*(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = \frac{1}{q^4}\mathfrak{C}^*\mathfrak{C} = -\frac{1}{q^4}\mathfrak{C}^2$$

also

$$q^3\ddot{q}\mathfrak{E} - q\mathfrak{B} = -\mathfrak{C}^2 \tag{12}$$

und es gilt $(\mathfrak{C}^2)^* = (\mathfrak{C}^*)^2 = \mathfrak{C}^2$, d. h. $\mathfrak{C}^2$ ist symmetrisch.

Es transformiere die Matrix $\mathfrak{R}$ die Matrix $\mathfrak{B}$ auf Hauptdiagonalform; dann folgt aus Gleichung (12)

$$q^3\ddot{q}\mathfrak{E} - q\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{R} = -\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{C}^2\mathfrak{R} \tag{13}$$

und daher ist auch $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{C}^2\mathfrak{R}$ eine Diagonalmatrix. Seien die Elemente dieser beiden Diagonalmatrizen

$$\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R} = (\beta_{kk}),\ \mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{C}^2\,\mathfrak{R} = (\gamma_{kk})$$

dann liefert (13) das Gleichungssystem

$$q^3\,\ddot{q} - q\,\beta_{kk} = -\gamma_{kk} \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

Nun sind die zwei Fälle zu unterscheiden: entweder es sind alle β_{kk} einander gleich, dann gilt dasselbe auch für die γ_{kk}; oder dies ist nicht der Fall, so folgt $q = \alpha = \text{const.}$ und somit $\alpha\,\mathfrak{B} = \mathfrak{C}^2$. Wegen der zugehörigen Determinantengleichung $\alpha^r\,|\,\mathfrak{B}\,| = |\,\mathfrak{C}|^2$ kommt das aber in Räumen ungerader Dimension nicht in Betracht, da diese Relation $|\,\mathfrak{B}\,| = 0$ nach sich zieht.

Betrachten wir zunächst die erstere Möglichkeit. Man gewinnt dann einerseits die Bestimmungsgleichung für $q(t)$

$$q^3\,\ddot{q} - \beta\,q = -\gamma' \tag{14}$$

andererseits gilt dann

$$\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R} = \beta\,\mathfrak{E} \text{ oder } \mathfrak{B} = \beta\,\mathfrak{E}.$$

Aus der sich ferner ergebenden Beziehung

$$\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{C}^2\,\mathfrak{R} = \gamma'\,\mathfrak{E} \text{ oder } \mathfrak{C}^2 = \gamma'\,\mathfrak{E} \tag{15}$$

folgt für die Determinante

$$|\,\mathfrak{C}\,| = (\gamma')^{r/2}$$

woraus man zunächst schließen kann, daß in euklidischen Räumen ungerader Dimensionszahl die Bewegung der n Körper nur längs Gerader durch den Schwerpunkt erfolgen kann.

Denn ist r ungerade, so ist wegen der Schiefsymmetrie von $\mathfrak{C}$ die Determinante $|\,\mathfrak{C}\,| = 0$, also auch $\gamma' = 0$ und damit $\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{C}^2\,\mathfrak{R} = 0$. D. h. aber $\mathfrak{C}^2 = 0$ und somit, da $\mathfrak{C}$ auf Grund ihrer Schiefsymmetrie nicht nilpotent sein kann, $\mathfrak{C} = 0$. Daher ist nach (11) auch $\dot{\mathfrak{A}} = 0$, was $\mathfrak{A} = \text{const.}$ nach sich zieht.

Im Falle $\gamma' = 0$ folgt aus (14) $q^2\,\ddot{q} = \beta$ und damit $\dot{q}\sqrt{q} = \sqrt{cq - 2\beta}$. Ist nun $\beta > 0$ $(c > 0)$ so findet man durch nochmalige Integration $q(t) \geqq 2\beta/c$. Ist hingegen $\beta < 0$, so gibt es ein reelles t_1, für welches $q(t_1) = 0$ ist, entgegen der Voraussetzung. Damit gilt:

Satz 1: In euklidischen Räumen ungerader Dimensionszahl gibt es im Falle, daß alle Massen das gleiche Vorzeichen aufweisen, für $\beta < 0$ und unter der oben diskutierten Voraussetzung $\dot{\mathfrak{B}} = 0$ keine Lagrangeschen Lösungen mit nach unten beschränktem positiven $q(t)$; für $\beta > 0$ existieren solche Lösungen und die Bewegung der Körper erfolgt längs Gerader durch den Schwerpunkt.

Aus (15) zeigt sich weiters, daß γ' nicht positiv sein kann, denn da $\mathfrak{C}^2$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein soll, bestehen ihre Elemente aus

$$\gamma' = \sum_{i=1}^{r} c_{ik}\, c_{kl} = -\sum_{i=1}^{r} c_{ik}^2 = -\gamma^2$$

für alle k.

Ist nun r gerade und $\gamma \neq 0$, so löst man zunächst Gleichung (14); es folgt

$$\dot{q} = \frac{1}{q}\sqrt{k_1 q^2 - 2\beta q - \gamma^2} \tag{16}$$

Nimmt man an, daß zur Zeit $t = t_0$ die Transformation $q(t)\,\mathfrak{A}(t)$ gleich der identischen Transformation ist, also $q(t_0) = 1$, so bestimmt sich die Integrationskonstante k_1 entsprechend

$$k_1 = \dot{q}^2(t_0) + 2\beta + \gamma^2$$

Daraus folgt, daß in den Fällen $k_1 \leq 0$ für β nur negative Werte möglich sind. Durch Integration von (16) zeigt sich, daß in den Fällen $k_1 \geqq 0$ die Funktion $q(t)$ nicht beschränkt bleibt, sobald $t \to \infty$ strebt, hingegen $k_1 < 0$ zu periodischen Bewegungen Anlaß gibt. In letzterem Falle sind die Anfangswerte $q(t_0)$ und $\dot{\mathfrak{A}}(t_0)$ bei gegebenem $\mathfrak{B}$ durch die Relation

$$q^2(t_0) + \gamma^2 < 2\,|\,\beta\,|$$

eingeengt. Wie leicht nachzuprüfen ist, divergiert das Integral $\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{q(\tau)}$ in allen drei Fällen für $t \to \infty$.

4. Schließlich verbleibt noch die Gleichung (11) zu lösen. Sie liefert:

$$\mathfrak{A}(t) = e^{P(t)\mathfrak{C}} \tag{17}$$

wobei

$$P = \int_1^{q(t)} \frac{d\omega}{\omega\sqrt{k_1\omega^2 - 2\beta\omega - \gamma^2}} = \frac{1}{\gamma}\,\arccos\,\frac{\beta\omega + \gamma^2}{\omega\sqrt{k_1\gamma^2 + \beta^2}}\,\Bigg|_{\omega=1}^{\omega=q(t)} \tag{18}$$

gesetzt wurde. Oder

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\,(P\mathfrak{C})^{\nu} \tag{19}$$

Nun gilt aber auf Grund von Gleichung (15)

$$\mathfrak{C}^{2\nu} = (-1)^{\nu}\gamma^{2\nu}\mathfrak{E},\quad \mathfrak{C}^{2\nu+1} = (-1)^{\nu}\gamma^{2\nu}\mathfrak{C}$$

daher kann (19) in der Form geschrieben werden

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(-1)^{\nu} \frac{1}{(2\nu)!} (P\gamma)^{2\nu} \mathfrak{E} + \frac{(-1)^{\nu}}{\gamma} \frac{1}{(2\nu+1)!} (P\gamma)^{2\nu+1} \mathfrak{C}\right]$$

oder

$$\mathfrak{A} = \cos(P\gamma)\,\mathfrak{E} + \frac{1}{\gamma} \sin(P\gamma)\,\mathfrak{C}$$

Somit sind die Elemente a_{ik} der Matrix $\mathfrak{A}$ gegeben durch

$$a_{ii} = \cos\varphi \qquad \text{für alle } i$$

$$a_{ik} = \frac{c_{ik}}{\gamma} \sin\varphi \qquad \text{für } i \neq k,$$

wenn man $P\gamma = \varphi$ setzt.

Im Falle $r = 2$ sei $c_{12} = c$, dann wird $\gamma = \pm c$ und man erhält die Drehmatrix für die Ebene.

Aus $P\gamma = \varphi$ folgt mit Rücksicht auf Gleichung (18)

$$q = \frac{-\frac{\gamma^2}{\beta}}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} k_1}$$

die Bahnkurven sind also Kegelschnitte. Wenn nun $k_1 > 0$, so ist $\varepsilon > 1$ und die Bahnkurve stellt eine Hyperbel dar. Ist $k_1 = 0$ $(\beta < 0)$, so ist $\varepsilon = 1$ und die Bahnkurve eine Parabel; gilt schließlich $k_1 < 0$ $(\beta < 0)$ und daher $\varepsilon < 1$, so erhält man eine Ellipse. Bei allen diesen Kegelschnitten liegt der eine Brennpunkt, der Bedeutung von φ entsprechend, im Schwerpunkt des Systems.

Bemerkung 1: Für den bei nichtbeschränkten Lösungen möglichen Grenzübergang $q(t) \to \infty$ folgt auch $t \to \infty$ und daher aus (11) $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} = 0$. Also gilt auch $\lim_{t\to\infty} \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^* \dot{\mathfrak{A}} = \lim_{t\to\infty} \dot{\mathfrak{A}} = 0$, da $\mathfrak{A}$ für $t \to \infty$ sicher beschränkt bleibt, und die Drehbewegung des Systems kommt damit zur Ruhe. Die Streckgeschwindigkeit wird konstant.

Hingegen bleibt bei periodischen Lösungen $q(t)$ beschränkt, also $Q_1 \leqq q \leqq Q_2$, daher ist nach (11)

$$\frac{1}{Q_2^2}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} \leqq \dot{\mathfrak{A}} \leqq \frac{1}{Q_1^2}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}$$

für alle t, und das System besitzt demnach auch für $t \to \infty$ eine endliche Rotationsgeschwindigkeit.

Bemerkung 2: Gilt für jeden der n Körper der Flächensatz, so befolgt er auch das dritte Kepler'sche Gesetz. Um den Flächensatz

zu bestätigen, genügt es, das Verschwinden des äußeren Produktes von $\mathfrak{x}_i$ und $\ddot{\mathfrak{x}}_i$ zu zeigen:

$$\mathfrak{x}_i \wedge \ddot{\mathfrak{x}}_i = q\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}_i \wedge (\ddot{q}\,\mathfrak{A} + 2\dot{q}\dot{\mathfrak{A}} + q\ddot{\mathfrak{A}})\,\mathfrak{v}_i = 2q\dot{q}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}_i \wedge \dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{v}_i + q^2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{v}_i \wedge \ddot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{v}_i$$

Nun folgt aus Gleichung (9)

$$\dot{\mathfrak{A}} = -\frac{2}{q^3}\dot{q}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} + \frac{1}{q^2}\dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{C} = -\frac{2}{q}\dot{q}\,\dot{\mathfrak{A}} + \frac{1}{q^2}\dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{C}$$

bzw. mit (15)

$$\dot{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{C} = \frac{1}{q^2}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}^2 = -\frac{\gamma^2}{q^2}\,\mathfrak{A}$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{x}_i\,\hat{A}\,\ddot{\mathfrak{x}} = 0$$

Nun ist noch $q = \alpha = \text{const.}$, $\alpha\,\mathfrak{B} = \mathfrak{C}^2$ zu untersuchen. Für die Matrix $\mathfrak{A}$ erhält man hiermit aus (17)

$$\mathfrak{A}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)!}\left(\frac{t-t_0}{\alpha^2}\right)^{2\nu}(\alpha\,\mathfrak{B})^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)!}\left(\frac{t-t_0}{\alpha^2}\right)^{2\nu+1}(\alpha\mathfrak{B})^{\nu}\,\mathfrak{C}$$

und dieser Ausdruck stellt eine orthogonale Matrix dar, denn $\mathfrak{R}^*\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^*\,\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{R}$ diejenige Matrix ist, die $\mathfrak{B}$ auf Hauptdiagonalform transformiert; also $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^* = \mathfrak{E}$. Dies ist leicht zu bestätigen, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{C}^2$ negativ definit ist, somit die $\gamma_{kk} < 0$ sind.

Faßt man das Ergebnis zusammen, so kann man sagen:

Satz 2: In euklidischen Räumen gerader Dimension existieren bei nach unten beschränktem, positiven $q(t)$ und der Voraussetzung $\dot{\mathfrak{B}} = 0$ neben den geradlinigen Lösungen noch weitere Lagrange'sche Lösungen, die entweder als Bahnen ebene Kegelschnitte liefern, oder deren Bahnen auf 2 m-dimensionalen Kugeln verlaufen ($m = 2, \ldots$).

Bemerkung 3: Analoge Überlegungen können angestellt werden, wenn man an Stelle des $1/r^2$-Gesetzes eine allgemeinere Zentralkraft $\Phi(|\,\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_i\,|)$ einführt, sofern diese Funktion Φ homogen ist. Denn dann geht bei der Transformation $\mathfrak{x}_i(t) = q(t)\,\mathfrak{A}(t)\,\mathfrak{v}_i$ diese über in

$$\Phi(|\,\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_i\,|) = \Phi(q\,|\,\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i\,|) = q^{\varrho}\,\Phi(|\,\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i\,|)$$

womit wieder die Bildung einer Matrix $\mathfrak{B}$ ermöglicht wird. Eine besondere Rolle spielt das $\frac{1}{r^3}$ — Gesetz. Macht man hier die den obigen Voraussetzungen entsprechenden: $0 < Q < q(t)$ und $\int_{t_0}^{\infty} \frac{d\tau}{q^2(\tau)}$ divergent,

so zeigt sich, daß entweder ein Wert t_1 existiert für den $q(t) = 0$, oder aber das angeführte Integral konvergiert. Damit genügt keine dieser Lösungen den gestellten Voraussetzungen. Man vgl. hiezu auch [6], [7], [8], [9].

5. Der Vollständigkeit halber sei noch auf die algebraische Aufgabe hingewiesen. Unter Berücksichtigung von $\hat{\mathfrak{B}} = 0$ schreibt sich das System (3) in der Form

$$(\beta + \sum_{k=1}^{n} m_k \varrho_{ik})\, \mathfrak{v}_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \varrho_{ik}\, \mathfrak{v}_k \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

mit
$$\varrho_{ik} = \varrho_{ki} = \begin{cases} \dfrac{1}{|\,\mathfrak{v}_k - \mathfrak{v}_i\,|^3} & \text{für } k \neq i \\ 0 & \text{für } k = i \end{cases}$$

Da der Rang der n Vektoren $\mathfrak{v}_i$ gleich r ist, sind bei geeigneter Nummerierung $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_r$ linear unabhängig; dann sind die restlichen $n-r$ Vektoren durch diese Basis des E_r eindeutig darstellbar

$$\mathfrak{v}_\nu = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{(\nu)}\, \mathfrak{v}_k \qquad (\nu = r+1, \ldots, n).$$

Damit folgt aus (20)

$$\sum_{k=1}^{r} \{m_k \varrho_{ik} - \delta_{ik}(\beta + \sum_{p=1}^{n} m_p \varrho_{ip}) + \sum_{\nu=r+1}^{n} \lambda_k^{(\nu)}[m_\nu \varrho_{i\nu} - \delta_{i\nu}(\beta + \sum_{p=1}^{n} m_p \varrho_{ip})]\}\, \mathfrak{v}_k = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Da $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_r$ als linear unabhängig vorausgesetzt wurden, hat dies das Verschwinden jedes Klammerausdruckes zur Folge

$$m_k \varrho_{ik} - \delta_{ik}(\beta + \sum_{p=1}^{n} m_p \varrho_{ip}) + \sum_{\nu=r+1}^{n} \lambda_k^{(\nu)}[m_\nu \varrho_{i\nu} - \delta_{i\nu}(\beta + \sum_{p=1}^{n} m_p \varrho_{ip})] = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r). \tag{21}$$

Ferner gilt, weil der Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Systems gelegt wurde,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathfrak{v}_k = \sum_{k=1}^{r} [m_k + \sum_{\nu=r+1}^{n} m_\nu \lambda_k^{(\nu)}]\, \mathfrak{v}_k = 0$$

woraus man auf Grund der Linearunabhängigkeit der $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_r$ analog schließt

$$m_k + \sum_{\nu=r+1}^{n} \lambda_k^{(\nu)}\, m_\nu = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

Berechnet man nun aus diesen r in λ linearen Gleichungen etwa $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_r^{(n)}$, also

$$\lambda_k^{(n)} = -\frac{m_k}{m_n} - \sum_{\nu=r+1}^{n-1} \frac{m_\nu}{m_n} \lambda_k^{(\nu)} \qquad (k = 1, \ldots, r), \tag{22}$$

so geht das Gleichungssystem (20) über in

$$m_n m_k(\varrho_{ik} - \varrho_{in}) + (m_k \delta_{in} - m_n \delta_{ik}) (\beta + \sum_{p=1}^{n} m_p \varrho_{ip}) +$$
$$+ \sum_{\nu=r+1}^{n-1} \lambda_k^{(\nu)}[m_n m_\nu(\varrho_{i\nu} - \varrho_{in}) + (m_\nu \delta_{in} - m_n \delta_{i\nu}) (\beta + \sum_{p=1}^{n} m_p \varrho_{ip})] = 0 \tag{23}$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r).$$

In diesem, in den ϱ_{ik} linearen, System sind nun alle möglichen Lagrange-schen Konfigurationen enthalten. Im Falle $r = 2$, $n = 4$ ist das System bei willkürlichem β regulär, ausgenommen die Gleichungsdeterminante

$$m_2^2 m_3^2 (1-\lambda_2^{(3)}) (1-\lambda_1^{(3)}-\lambda_2^{(3)}) (m_1+m_3\lambda_1^{(3)}+m_4\lambda_1^{(3)}) [m_1(1-\lambda_1^{(3)}-\lambda_2^{(3)})+M\lambda_1^{(3)}]\alpha_j = 0$$
$$(j = 1, 2),$$

wobei $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ die Gesamtmasse bedeutet und die α_j sich in der Form darstellen:

$$\alpha_1 = -M\lambda_1^{(3)}\{m_3(\lambda_1^{(3)}+\lambda_2^{(3)}) (m_1\lambda_2^{(3)} - m_2\lambda_1^{(3)}) + m_1(m_1+m_4)\lambda_2^{(3)} + m_2(m_3 - m_1)\lambda_1^{(3)} + m_1 m_2\}$$

bzw.

$$\alpha_2 = -M\{m_3\lambda_2^{(3)}(\lambda_1^{(3)}+\lambda_2^{(3)}) (m_1\lambda_2^{(3)} - m_2\lambda_1^{(3)}) + [m_1\lambda_2^{(3)} - m_3(\lambda_1^{(3)}+\lambda_2^{(3)})]$$
$$(m_1\lambda_2^{(3)} - m_2\lambda_1^{(3)}) + (m_2 m_3\lambda_1^{(3)} + m_1 m_4\lambda_2^{(3)})\lambda_2^{(3)} + m_1(m_2 - m_1 - m_4)\lambda_2^{(3)} + m_2$$
$$(m_1 - m_3)\lambda_1^{(3)} - m_1 m_2\}.$$

Verschwindet die Gleichungsdeterminante, so ist mindestens ein ϱ_{ik} wählbar und eine geometrisch mögliche Lösung liegt vor, wenn die Vierpunktrelation erfüllt ist. Jedoch werde hierauf nicht weiter eingegangen, sondern auf das Buch von *Hamel* [4] verwiesen.

Bemerkung 4: Wenn $r = 2$, $n = 4$, so besitzt das System (23) genau soviel Gleichungen als Unbekannte. Man kann nun danach fragen, für welche ganze Zahlen r und n das stets der Fall ist. Bei willkürlichem β liegen insgesamt $\binom{n}{2} + r(n - r - 1)$ Unbekannte ϱ_{ik} bzw. $\lambda_k^{(\nu)}$ und nr Gleichungen vor. Es soll dann also sein

$$n(n - 1) = r(r + 1)$$

und die Bestimmung aller ganzen Zahlen r und n führt auf eine diophantische Gleichung der Form

$$2x^2 - y^2 = 1$$

mit $x = 2r + 1$, $y = 2n - 1$ und diese liefert, da die quadratische Form $\Phi = 2x^2 - y^2$ indefinit ist und die Kongruenz $z^2 \equiv 8 \pmod 4$ die einzige brauchbare Minimalwurzel $z = G = 0$ besitzt, ein einziges System von unendlich vielen Lösungen. Man erhält sie aus der ersten Spalte (α, γ) der Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A\,T = \pm \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^h \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (h \text{ beliebig, ganz})$$

wobei A ein Automorph der Form Φ ist und T die Form Φ in die zu ihr äquivalente Form

$$x^2 + G\,xy + \frac{G^2 - \Delta}{4}\,y^2$$

mit Δ als Diskriminante der Form Φ überführt.

Der einfachste Fall $(h = 1)$ entspricht vier Körpern in der Ebene.

Literatur

[1] *L. Euler*, De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop, 11/144 (1767).

[2] *J. L. Lagrange*, Oeuvres, Bd. 6/272 (1873).

[3] *C. Caratheodory*, Über die strengen Lösungen des Dreikörperproblems. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math. Naturwiss. Abt. 1933, S. 257.

[4] *G. Hamel*, Theoretische Mechanik. Grundl. d. math. Wiss. Bd. 57, Springer 1949.

[5] *C. L. Siegel*, Vorlesungen über Himmelsmechanik. Grundl. d. math. Wiss. Bd. 85, Springer 1956.

[6] *R. Hoppe*, Erweiterung der bekannten Speziallösung des Dreikörperproblems. Archiv d. Math. u. Phys. 64/218 (1879).

[7] *E. Egerváry*. On a new form of the differential equations of the problem of three bodies. Hung. Acta Mathem. I/1—18 (1946—1949).

[8] *A. Wintner*, The analytical foundations of Celestial Mechanics. Princeton, New Jersey 1947.

[9] *R. Kurth*, On Lagrange's triangular solution of the problem of three bodies. Archiv d. Math. 8/381—392 (1957).

Reguläre Graphen beliebigen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 10. November 1958)

Exposition

Der Autor hat in [4] die folgenden Sätze bewiesen:

Satz 1. Es gibt keinen (endlichen) regulären Graphen X mit dem Zusammenhang $c(X) = 1$ und der Farbenzahl $\chi(X) = 2$ [4, Satz 2].

Satz 2. Sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe und seien n, χ, c drei natürliche Zahlen, wobei $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$ und nicht gleichzeitig $\chi = 2$ und $c = 1$ ist, dann gibt es unendlich viele nicht-isomorphe (endliche) Graphen X, die regulär vom Grade n sind, deren Farbenzahl $\chi(X) = \chi$, deren Zusammenhang $c(X) = c$ und deren Automorphismengruppe $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Sie haben keine Fixpunkte und keine Fixkanten, falls $\mathfrak{H}$ mindestens zwei Elemente hat [4, Satz 3].

In [5] betrachtete der Autor dasselbe Problem für unendliche Graphen und bewies

Satz 3. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und drei natürliche Zahlen n, χ, c vorgegeben sind, so daß $3 \leqq n \leqq 5$, $2 \leqq \chi \leqq n$, $1 \leqq c \leqq n$ (wobei auch die Kombination $c = 1$, $\chi = 2$ zugelassen ist), dann gibt es eine nicht abzählbare Menge von unendlichen regulären Graphen X n-ten Grades, mit $G(X) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X) = \chi$, $c(X) = c$. Sie haben weder Fixpunkte noch Fixkanten, falls $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ [5, Satz 4].

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns von der Einschränkung $n \leqq 5$ befreien, dafür aber auf die willkürliche Vorgabe von c verzichten. Wir benötigen das von *G. Sabidussi* in [7] und [8] eingeführte Graphenprodukt [7, Def. (2.1)] und die folgenden Sätze:

Satz 4. Das Produkt zusammenhängender Graphen ist zusammenhängend [7, *Lemma* (2.2)].

Satz 5. Sind X und Y reguläre Graphen, so ist $n(X \times Y) = n(X) + n(Y)$ [7, *Lemma* (2.5)].

Satz 6. $\chi(X \times Y) = max\,(\chi(X), \chi(Y))$ [7, *Lemma* (2.6)].

Satz 7. Sind die Graphen X, Y *teilerfremd, dann ist* $G(X \times Y) \cong G(X) \times G(Y)$. [7, *Lemma* (2.10)] unter Berufung auf [8, (1.3) *und* (3.2)].

Satz 8. Die Graphenmultiplikation ist assoziativ und kommutativ.

Durchführung

Satz 9. Es sei eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ *und eine natürliche Zahl* n *gegeben,* $3 \leqq n < \infty$; *dann gibt es unendlich viele endliche Graphen* X *und eine nicht abzählbare Menge unendlicher Graphen* X *mit folgenden Eigenschaften: sie sind regulär vom Grade* n, $\chi(X) = 2$, $G(X) \cong \mathfrak{H}$.

Beweis. Ist $3 \leqq n \leqq 5$, so braucht man im Lichte von Satz 2 und Satz 3 nichts mehr zu beweisen. Nehmen wir daher $6 \leqq n < \infty$ an. Dann gibt es eine Summenzerlegung $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, so daß $3 \leqq n_i \leqq 5$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$. Laut Satz 2 und 3 gibt es unendlich viele endliche reguläre Graphen X_1, resp. eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X_1, so daß $G(X_1) \cong \mathfrak{H}$, $\chi(X_1) = 2$, $n(X_1) = n_1$. Ebenso gibt es nach Satz 2 unendlich viele endliche reguläre Graphen X mit $G(X) \cong \mathfrak{E}$, $\chi(X) = 2$, $n(X) = n_i$. Aus diesen wählen wir die Graphen $X_2, X_3, \ldots, X_k$, und zwar alle voneinander und auch von X_1 verschieden. Nun bilden wir das Sabidussische Graphenprodukt $X_0 = \prod_{i=1}^{k} X_i$. Wir bemerken noch, daß die in [4] und [5] konstruierten Graphen, die durch die Heranziehung der Sätze 2 und 3 hereinkommen, offenbar Primgraphen sind. Voneinander verschiedene Primgraphen sind natürlich auch paarweise teilerfremd. Wir erhalten also:

$$\chi(X_0) = \chi\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) = \max_{i=1}^{k} \chi(X_i) = \max_{i=1}^{k} 2 = 2,$$

$$n(X_0) = n\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} n(X_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i = n,$$

$$G(X_0) \cong G\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \cong \prod_{i=1}^{k} G(X_i) \cong \mathfrak{H} \times \prod_{i=2}^{k} \mathfrak{E} \cong \mathfrak{H}, \text{ q. e. d.}$$

Satz 10. Es sei eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ *und eine natürliche Zahl* n *mit* $3 \leqq n < \infty$ *gegeben; dann gibt es unendlich viele endliche Graphen* X *und eine nicht abzählbare Menge unendlicher Graphen* X, *die regulär vom Grade* n, *deren* $\chi(X) = n$ *und deren* $G(X) \cong \mathfrak{H}$ *sind.*

Beweis. Wir nehmen die Graphen aus Satz 9 und ersetzen in ihnen jeden Knotenpunkt (mitsamt den zu ihm laufenden Kanten) durch den wie folgt definierten Graphen W_n^n (einen vollständigen Graphen, an dessen jede Ecke eine Endkante angehängt wurde):

$$W_n^n = (V(W_n^n),\ E^*(W_n^n)),\ n \geqq 3,$$

$$V(W_n^n) = \bigcup_{i=1}^{n} \{A_i \cup B_i\},$$

$$E^*(W_n^n) = \bigcup_{i=1}^{n} [A_i, B_i] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} [B_i, B_j].$$

Die dadurch entstandenen neuen Graphen erfüllen die Anforderungen des Satzes 10.

Satz 11. Es seien eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und zwei natürliche Zahlen n und χ so vorgegeben, daß $3 \leqq n < \infty$ und $2 \leqq \chi \leqq n-3$ oder $\chi = n$; dann gibt es eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X derart, daß $n(X) = n$, $\chi(X) = \chi$, $G(X) \cong \mathfrak{H}$.

Beweis. In Anbetracht der Sätze 2, 3, 9 und 10 können wir uns auf $6 \leqq n < \infty$ und $3 \leqq \chi \leqq n-3$ beschränken. Wir ziehen nochmals Satz 10 heran: Es gibt eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X_1 mit $n(X_1) = \chi$, $\chi(X_1) = \chi$, $G(X_1) \cong \mathfrak{H}$. Und wegen $3 \leqq n - \chi < \infty$ gibt es nach Satz 9 unendlich viele endliche reguläre Graphen X_2 mit $n(X_2) = n - \chi$, $\chi(X_2) = 2$, $G(X_2) \cong \mathfrak{E}$. Diese X_2 sind Sabidussische Produkte endlich vieler, aus unendlich vielen Graphen beliebig ausgesuchter Primgraphen; auch jedes X_1 hat nur endlich viele Primfaktoren: daher ist es bei beliebigem X_1 möglich, ein zu ihm teilerfremdes X_2 zu finden; und nun bilden wir das Sabidussische Graphenprodukt $X_1 \times X_2$ dieser beiden; dann ist

$$n(X_1 \times X_2) = n(X_1) + n(X_2) = \chi + n - \chi = n,$$

$$\chi(X_1 \times X_2) = \max(\chi(X_1), \chi(X_2)) = \max(\chi, 2) = \chi,$$

$$G(X_1 \times X_2) \cong G(X_1) \times G(X_2) \cong \mathfrak{H} \times \mathfrak{E} \cong \mathfrak{H},\ \text{q. e. d.}$$

Mit Satz 11 scheinen wir schon ziemlich viel erreicht zu haben. Um uns aber von der Einschränkung, daß χ weder $n-1$ noch $n-2$ sein darf, zu befreien, müssen wir noch einmal etwas weiter ausholen.

Satz 12. Zu jedem $n \geqq 3$ gibt es unendlich viele endliche Graphen X^n mit folgenden Eigenschaften:

(1) *X^n hat genau 2 Punkte vom Grade 1; alle anderen Punkte sind vom Grade n.*

(2) *$\chi(X^n) = 2$, wobei die beiden Endpunkte verschiedene Farben erhalten.*

(3) *$G(X^n)$ besteht aus genau zwei Elementen: der Identität und der Spiegelung an einer Symmetrieebene, wobei kein Punkt und genau eine Kante fix bleibt.*

Beweis. Laut Satz 9 gibt es unendlich viele endliche reguläre Graphen X_n mit $n(X_n) = n$, $\chi(X_n) = 2$, $G(X_n) \cong \mathfrak{G}$. Ersetzt man in einem solchen X_n eine beliebige Kante durch zwei Endkanten, so ändert das weder die Farbenzahl noch die Gruppe des Graphen. Nun muß man nur zwei Kopien eines solchen Graphen in symmetrischer Weise zusammenhängen, indem man zwei (von jedem Graphen eine) einander entsprechende Endkanten identifiziert, um einen Graphen X^n mit den gewünschten Eigenschaften zu erhalten.

Definition 1. $U_n^{n+1} = (V(U_n^{n+1}),\ E^*(U_n^{n+1}))$, $n \geqq 3$,

$$V(U_n^{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{A_i \cup B_i \cup K_i \cup L_i \cup N_i\},$$

$$E^*(U_n^{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{[A_i, K_i] \cup [K_i, L_i] \cup [L_i, N_i] \cup [N_i, B_i]\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{[K_i, K_j] \cup [L_i, L_j] \cup [N_i, N_j]\}.$$

Definition 2. $U_n^{n+2} = (V(U_n^{n+2}),\ E^*(U_n^{n+2}))$, $n \geqq 3$

$$V(U_n^{n+2}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{A_i \cup B_i \cup K_i \cup L_i \cup M_i \cup N_i\}$$

$$E^*(U_n^{n+2}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{[A_i, K_i] \cup [K_i, L_i] \cup [K_i, M_i] \cup [L_i, M_i] \cup$$

$$\cup [L_i, N_i] \cup [M_i, N_i] \cup [N_i, B_i]\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{[K_i, K_j] \cup$$

$$\cup [L_i, L_j] \cup [M_i, M_j] \cup [N_i, N_j]\}.$$

Definition 3. Man nehme einen Graphen U_n^{n+1} und zwei verschiedene Graphen vom Typ X^{n+1} (siehe Satz 12), die wir mit X_K^{n+1} und X_N^{n+1} bezeichnen wollen. Dann ersetze man jede Kante $[K_i, K_j]$ des Graphen U_n^{n+1} durch eine Kopie X_{Kij}^{n+1} von X_K^{n+1} und jede Kante $[N_i, N_j]$ des Graphen U_n^{n+1} durch eine Kopie X_{Nij}^{n+1} von X_N^{n+1}. Der resultierende Graph soll W_n^{n+1} heißen.

Definition 4. Wir nehmen einen Graphen U_n^{n+2} und drei paarweise verschiedene Graphen vom Typ X^{n+2} (wieder nach Satz 12), die X_K^{n+2}, X_M^{n+2} und X_N^{n+2} heißen sollen. Dann ersetzen wir in U_n^{n+2} jede Kante $[K_i, K_j]$ durch eine Kopie X_{Kij}^{n+2} von X_K^{n+2}, jede Kante $[M_i, M_j]$ durch eine Kopie X_{Mij}^{n+2} von X_M^{n+2} und jede Kante $[N_i, N_j]$ durch eine Kopie X_{Nij}^{n+2} von X_N^{n+2}. Den so erhaltenen Graphen nennen wir W_n^{n+2}.

Satz 13. Die Farbenzahl $\chi(W_n^{n+1}) = n$ und es gibt bei beliebiger Vorgabe der Farben $\varphi(A_i)$ und $\varphi(B_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Punkte A_i und B_i stets eine Farbenzuordnung φ mit genauen Farben für den ganzen Graphen W_n^{n+1}.

Beweis. Wir legen zunächst die Farben $\varphi(L_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fest, wobei $\varphi(L_1), \varphi(L_2), \ldots, \varphi(L_n)$ irgendeine Permutation der n Farben sein soll. Dann bestimmen wir die Farben $\varphi(K_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ so, daß für jedes $\varphi(K_i)$ die Ungleichungen $\varphi(K_i) \neq \varphi(L_i)$ und $\varphi(K_i) \neq \varphi(A_i)$ befriedigt sind. Da $n \geqq 3$ Farben verfügbar sind, ist das stets möglich. Ebenso sollen die $\varphi(N_i)$ die Ungleichungen $\varphi(N_i) \neq \varphi(L_i)$ und $\varphi(N_i) \neq \varphi(B_i)$ befriedigen, was aus demselben Grunde stets erreicht werden kann. Jetzt müssen nur noch den Knotenpunkten der eingehängten Kopien von X_K^{n+1} und X_N^{n+1} Farben zugeordnet werden. Aus Satz 12 wissen wir, daß das mit 2 Farben möglich ist, falls die Endpunkte verschiedene Farben haben. Sollten sie aber bereits gleiche Farbe erhalten haben — die $\varphi(K_i)$ und $\varphi(N_i)$ sind ja schon festgelegt — dann können wir für die inneren Punkte so eines X_{Kij}^{n+1} oder X_{Nij}^{n+1} z. B. einfach zwei Farben verwenden, die von der Farbe dieser beiden Endpunkte verschieden sind. Somit können wir die gewünschte Farbenzuordnung φ mit genau n Farben für den ganzen Graphen W_n^{n+1} herstellen. Daß es mit weniger Farben nicht geht, folgt aus der Tatsache, daß der durch $\bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} [L_i, L_j]$ definierte Untergraph von W_n^{n+1} ein vollständiger Graph mit n Punkten ist.

Satz 14. Ist $n \geqq 4$, so ist $\chi(W_n^{n+2}) = n$ und es gibt, wenn die Farben $\varphi(A_i)$ und $\varphi(B_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Punkte A_i und B_i beliebig vorgegeben sind, stets für den ganzen Graphen W_n^{n+2} eine Farbenzuordnung φ mit genau n Farben.

Beweis. Wir wählen zunächst wieder für $\varphi(L_1), \varphi(L_2), \ldots, \varphi(L_n)$ eine beliebige Permutation der n verfügbaren Farben. Dann seien die Farben $\varphi(M_i)$ der Punkte M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ so festgelegt, daß $\varphi(M_i) \neq \varphi(L_i)$. Weiters bestimmen wir die $\varphi(K_i)$ aus den $n \geqq 4$ verfügbaren Farben so, daß $\varphi(K_i) \neq \varphi(A_i)$, $\varphi(K_i) \neq \varphi(L_i)$ und $\varphi(K_i) \neq \varphi(M_i)$. Ebenso muß jedes $\varphi(N_i)$ den Ungleichungen $\varphi(N_i) \neq \varphi(B_i)$, $\varphi(N_i) \neq \varphi(L_i)$ und $\varphi(N_i) \neq \varphi(M_i)$

genügen. Zuletzt werden noch die Knotenpunkte der diversen X_{Kij}^{n+2}, X_{Mij}^{n+2} und X_{Nij}^{n+2} genauso behandelt, wie es beim Beweis zu Satz 13 mit den entsprechenden Graphenteilen geschehen ist. Somit haben wir die Farbenzuordnung φ. Weil auch W_n^{n+2} den vollständigen Graphen mit n Punkten $\bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} [L_i, L_j]$ als Untergraphen enthält, sehen wir, daß es mit weniger als n Farben nicht gehen kann.

Satz 15. Die Automorphismengruppen $G(W_n^{n+1})$ und $G(W_n^{n+2})$ sind $\cong \mathfrak{S}_n$. Die Untergruppe, die alle A_i (und ebenso die, die alle B_i) festläßt, besteht aus der Identität allein.

Beweis. Es dürfte wohl genügen, die einer beliebigen Permutation $\binom{i}{a_i} \varepsilon \mathfrak{S}_n$ entsprechenden Permutationen der Knotenpunkte anzugeben. Wir haben für W_n^{n+1}:

$$\binom{i}{a_i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_i & B_i & K_i & L_i & N_i & X_{Kij}^{n+1} & X_{Nij}^{n+1} \\ A_{a_i} & B_{a_i} & K_{a_i} & L_{a_i} & N_{a_i} & X_{Ka_ia_j}^{n+1} & X_{Na_ia_j}^{n+1} \end{pmatrix}$$

und für W_n^{n+2}:

$$\binom{i}{a_i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_i & B_i & K_i & L_i & M_i & N_i & X_{Kij}^{n+2} & X_{Mij}^{n+2} & X_{Nij}^{n+2} \\ A_{a_i} & B_{a_i} & K_{a_i} & L_{a_i} & M_{a_i} & N_{a_i} & X_{Ka_ia_j}^{n+2} & X_{Ma_ia_j}^{n+2} & X_{Na_ia_j}^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Satz 16. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und eine natürliche Zahl $n \geqq 6$ vorgegeben ist, dann läßt sich stets eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X finden, so daß $n(X) = n$, $\chi(X) = n - 1$ oder $\chi(X) = n - 2$ (nach Belieben), $G(X) \cong \mathfrak{H}$.

Beweis. Laut Satz 9, 10 oder 11 gibt es eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X_1 mit $n(X_1) = n - 1$, $\chi(X_1) \leqq n - 1$, $G(X_1) \cong \mathfrak{H}$. Wir nehmen einen beliebigen Graphen X_1, konstruieren zwei isomorphe Kopien davon und ersetzen dann alle Paare entsprechender Knotenpunkte durch isomorphe Kopien eines Graphen W_{n-1}^n. Dieses Verfahren ist analog dem, wie wir es z. B. schon in [4] beim Beweis zu Satz 3 angewendet haben. Der neu entstandene Graph X hat $n(X) = n$, $\chi(X) = n - 1$, $G(X) \cong \mathfrak{H}$.

Nach denselben Sätzen gibt es auch eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X_2 mit $n(X_2) = n - 2$, $\chi(X_2) \leqq n - 2$, $G(X_2) \cong \mathfrak{H}$. Wir wiederholen die obige Konstruktion, aber mit einem Graphen W_{n-2}^n. Die Graphen X, die wir diesmal erhalten, haben $n(X) = n$, $\chi(X) = n - 2$ und $G(X) \cong \mathfrak{H}$.

Wir können nun in einer

Zusammenfassung

der Sätze 2, 3, 11 und 16 das Hauptresultat dieser Arbeit formulieren:

Satz 17. Wenn eine endliche Gruppe $\mathfrak{H}$ und zwei natürliche Zahlen n und χ so vorgegeben sind, daß $3 \leqq n < \infty$ und $2 \leqq \chi \leqq n$ ist, dann gibt es stets eine unendliche Menge endlicher und eine nicht abzählbare Menge unendlicher regulärer Graphen X vom Grade $n(X) = n$, mit der Farbenzahl $\chi(X) = \chi$ und einer Automorphismengruppe $G(X) \cong \mathfrak{H}$. Da die Graphen, von denen wir bei der Konstruktion ausgegangen sind, für $\mathfrak{H} \ncong \mathfrak{E}$ frei von Fixpunkten und Fixkanten waren, ist im Lichte der verwendeten Substitutionstechnik leicht einzusehen, daß auch die neu erhaltenen Graphen diese Eigenschaften haben müssen. Denn zu jeder Kante eines neuen Graphen, die aus einer Kante des alten Graphen hervorgegangen ist, gibt es wegen der Fixkantenfreiheit des alten ein Element der Gruppe, das diese Kante verändert. Jene Knotenpunkte und Kanten aber, die aus den Knotenpunkten des alten Graphen hervorgehen, können nicht invariant sein, weil der alte Graph keine Fixpunkte hatte. Zum Schluß sei noch vermerkt, daß die konstruierten Graphen zusammenhängend sind und weder Einecke noch Zweiecke enthalten.

Literatur

[1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", J. London Math. Soc. **27**, 85–92 (1952).

[2] *R. Frucht*, „Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe", Compositio Math. **6**, 239–250 (1938).

[3] *R. Frucht*, "Graphs of degree 3 with given abstract group", Canadian J. of Math. **1**, 365–378 (1949).

[4] *H. Izbicki*, „Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen", Monatshefte für Math. **61**, 42–50 (1957).

[5] *H. Izbicki*, „Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften", Monatshefte für Math. **63**, 298–301 (1959).

[6] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig 1936.

[7] *G. Sabidussi*, Graphs with given group and given graph-theoretical properties", Canadian J. of Math. **9**, 515–525 (1957).

(In [4] wurde diese Arbeit unter dem ursprünglich vorgesehenen Titel „Graph properties independent of the automorphism group" zitiert.)

[8] *G. Sabidussi*, "Graph multiplication", Mathematische Zeitschrift (eingereicht).

[9] *G. Sabidussi*, "On the minimum order of graphs with given automorphism group", Monatshefte für Math. **63**, 124–127 (1959).

[10] *H. Whitney*, "Congruent graphs and the connectivity of graphs", Amer. J. of Math. **54**, 150–168 (1932).

Ausgezeichnete Gitter eines Sternkörpers

Von

Johann Hejtmanek, Wien

(Eingegangen am 14. Januar 1959)

1.

S ist ein Sternkörper vom endlichen Typus $\Delta(S) < \infty$ [1], $f(x)$ seine Distanzfunktion. Im Raum aller Gitter Ω definiert man eine Funktion

$$f(\Lambda) = \inf f(X) \quad X \in \Lambda,\ X \neq O$$

Definition: Ein Gitter Λ mit $f(\Lambda) = 1$ heißt ausgezeichnetes Gitter, kurz: a-Gitter. Es ist leicht einzusehen, daß jedes zulässige Gitter mit einem Gitterpunkt auf dem Rand von S ein a-Gitter ist.

Für jedes Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta \geq \Delta(S)$ gilt entweder $f(\Lambda) < 1$ oder $f(\Lambda) \geq 1$. Gibt es zu diesem Δ ein a-Gitter, so heißt Δ ein Markoffscher Wert, kurz: ein M-Wert. In dieser Arbeit werden einige Eigenschaften der M-Werte und der a-Gitter von Sternkörpern untersucht.

Dieses Problem kann in eine äquivalente Form gebracht werden: $\Delta(S)$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Delta(S) = 1$ gesetzt werden.

$$0 \leq f(\Lambda) \leq 1$$

für alle Λ mit $d(\Lambda) = 1$. Der Wertevorrat der Funktion $f(\Lambda) = \delta$ steht mit den M-Werten in einem einfachen Zusammenhang:

$$\frac{1}{\delta} f(\Lambda) = 1$$

$$f(\frac{1}{\delta} \Lambda) = 1$$

$\frac{1}{\delta} \Lambda$ ist also ein a-Gitter, sein M-Wert Δ

$$\Delta = d(\frac{1}{\delta} \Lambda) = \frac{1}{\delta^n} d(\Lambda) = \frac{1}{\delta^n}$$

2.

Satz 2,1: *Die Menge M_0 der a-Gitter Λ, die alle ein und denselben Punkt $P \in \Lambda$, $P \in$ Rand von S besitzen, ist abgeschlossen und so auch die entsprechende Menge der M-Werte.*

Wenn

$$\Lambda_i \to \Lambda' \qquad \Lambda_i \in M_0$$

dann ist Λ' zulässig und enthält P, somit ist es ein a-Gitter w.z.b.w.

Satz 2,2: *Ist Δ kein M-Wert, so auch $\frac{1}{n}\Delta$, $(n = 1, 2, \ldots)$, kein M-Wert.*

Denn alle Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta$ sind nicht zulässig, so ist auch jedes Gitter Γ, das Λ als Teilgitter enthält, nicht zulässig, das sind aber alle Gitter mit $d(\Gamma) = \frac{1}{n}\Delta$.

Satz 2,3: *Wenn Δ ein M-Wert ist, so ist, auch $n\,\Delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein M-Wert.*

Zum Beweis wählt man ein a-Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta$ aus. Für alle Teilgitter Λ' vom Index n über das Gitter Λ gilt

$$1 \leq f(\Lambda')$$

Andererseits gibt es eine Folge von $G_i \in \Lambda$ mit

$$\lim_{i \to \infty} f(G_i) = 1$$

Λ_i' sei ein Teilgitter, das G_i enthält

$$\lim_{i \to \infty} f(\Lambda_i') = 1$$

Nach dem Mahlerschen Auswahlsatz existiert eine konvergente Teilfolge Λ_i''

$$\lim_{i \to \infty} \Lambda_i'' = \Lambda$$

Λ ist ein a-Gitter mit $d(\Lambda) = n\,\Delta$.

Bemerkung: Wenn die M-Werte ein Intervall enthalten, dann sind für $\Delta \geq K$ alle Δ M-Werte. Denn mit $[a, b]$ sind $\Delta \in [na, nb]$ $n = 1, 2, \ldots$ M-Werte. Diese Intervalle überlappen für $K > \frac{b}{b - a}$.

3.

Satz 3,1: *Die M-Werte eines beschränkten Sternkörpers S bilden das Intervall* $[\Delta(S), \infty)$.

Wird $\Delta \geq \Delta(S)$ beliebig gewählt, so gibt es wegen der Definition von $\Delta(S)$ sicher ein Gitter Λ, welches 1. zulässig ist und 2. $d(\Lambda) = \Delta$ hat. Ist Γ ein kritisches Gitter, so braucht man nur $\Lambda = \sqrt[n]{\frac{\Delta}{\Delta(S)}}\,\Gamma$ zu setzen. Ein a-Gitter eines beschränkten Sternkörpers hat sicher einen Gitterpunkt auf dem Rand von S. Denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es sicher endlich viele Gitterpunkte P mit

$$1 \leq f(P) \leq 1 + \varepsilon$$

Für sicher ein P gilt diese Ungleichung für alle ε, also ist

$$f(P) = 1$$

$P_1, \ldots, P_n$ formen eine Basis des Gitters Λ. Entweder Λ hat einen Gitterpunkt auf dem Rand von S oder keinen. In letzterem Fall wird die Menge aller Gitter $\Gamma(\lambda)$ mit der Basis $\lambda P_1, P_2, \ldots P_{n-1}, \frac{1}{\lambda} P_n$ betrachtet. Für $\lambda = 1$ ist $\Gamma(1) = \Lambda$ ein zulässiges Gitter, für sehr kleines λ — wenn $\lambda P_1 \in S^0$ — ein nicht zulässiges. Nun wird mit

$$\sup \lambda = \lambda_0$$

$$\Gamma(\lambda) \text{ nicht zulässig}$$

das Gitter $\Gamma(\lambda_0)$ gebildet. Es hat 1. einen Gitterpunkt auf dem Rand von S, 2. ist zulässig und 3. $d(\Gamma(\lambda_0)) = \Delta$ w.z.b.w.

4.

Die Menge aller $P = (x_1, x_2)$ im R_2 mit

$$|x_1 x_2| \leq 1$$

$$|x_1 + x_2| \leq 1$$

ist ein beschränkter Sternkörper K_1 mit $\Delta(K_1) = \sqrt{5}$ [2]. Der Durchschnitt der beiden Sternkörper

$$K_2 \quad |x_1^{\,a} x_2| \leq 1 \qquad a \geq 1$$

$$K_3 \quad |x_1 x_2^{\,a}| \leq 1$$

ergibt einen Sternkörper $K_4 = K_2 \cap K_3$. Im folgenden Abschnitt wird $K = K(a) = K_1 \cup K_4$ untersucht.

Satz 4,1: *Die M-Werte des Sternkörpers K bilden für hinreichend großes* $a \geq 1$ *das Intervall* $[\Delta(K_1), \infty)$.

K ist im Sternkörper S $|x_1\, x_2| \leq 1$ enthalten. S ist voll automorph, seine Automorphismengruppe wird mit $G = \{\Omega\}$ bezeichnet. Werden auf ein Gitter Λ alle Automorphismen Ω angewendet, so entsteht eine Menge von Gittern $o(\Lambda)$, die alle gleiche Determinante haben, und falls Λ zulässig war, selbst alle zulässig sind. $\Gamma(\Lambda)$, die abgeschlossene Hülle von $o(\Lambda)$, ist Vereinigungsmenge von gewissen $o(\Lambda_\gamma)$, denn mit

$$\Lambda_\gamma \in \Gamma(\Lambda)$$

$$\text{d. h. } \Lambda_\gamma = \lim_{i \to \infty} \Omega_i \Lambda$$

gehört auch $\Omega \Lambda_\gamma = \Omega \lim_{i \to \infty} \Omega_i \Lambda = \lim_{i \to \infty} \Omega\, \Omega_i \Lambda = \lim_{i \to \infty} \Omega_i' \Lambda$

$$\Omega \Lambda_\gamma \in \Gamma(\Lambda)$$

$\Gamma(\Lambda)$ besteht aus zulässigen Gittern, falls Λ zulässig ist.

Hilfssatz 4,1: Ist Λ ein a-Gitter, so enthält $\Gamma(\Lambda)$ ein Gitter Λ', das einen Gitterpunkt auf dem Rand von S enthält.

Der Beweis dieses Satzes findet sich in einer Arbeit über fast periodische Gitter von C. A. Rogers [4] und ist dort in Satz 1 enthalten. Weiters gibt es in $o(\Lambda')$ ein Gitter $\Lambda'' \in o(\Lambda')$, das den Punkt (1,1) auf dem Rand von S als Gitterpunkt enthält.

Man untersucht nun alle Gitter Λ mit der Basis $P = (1,1)$ und Q, ob sie zulässig sind, und da jedes zulässige Gitter mit einem Gitterpunkt auf dem Rand a-Gitter ist, erhält man eine Klasse von a-Gittern, deren Determinanten alle M-Werte bilden.

Der Bereich, abgegrenzt von

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1\, x_2 = -1$$

bildet einen Fundamentalbereich für die Menge der Q, den man aus Symmetriegründen noch zum Bereich F einengen kann:

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1\, x_2 = -1$$

Die Punkte Q, die mit $P = (1,1)$ ein Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta$ erzeugen,

liegen im Durchschnitt der Geraden $x_2 = x_1 + \Delta$ mit F, dieses Intervall wird mit $I(\Delta)$ bezeichnet, es hat die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Die Gitter Λ mit $d(\Lambda) = \Delta \geq \sqrt{5}$ und der Basis $P = (1,1)$ $Q \in I(\Delta)$ bestehen aus allen Punkten

$$G = m\,P + n\,Q \qquad m, n \text{ ganzzahlig},$$

wobei alle Gitterpunkte auf Geraden

$$x_2 = x_1 + n\,\Delta$$

liegen, unabhängig von der Wahl von Q. Dieses n stimmt mit dem der vorhergehenden Gleichung überein.

Man untersucht nun die Menge der nicht zulässigen Gitter Λ und die entsprechende Teilmenge der Punkte $Q \in I(\Delta)$. Es wird sich zeigen, daß die offene Menge der Q $N = N(\Delta)$ ein Maß $\mu(N) < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat, so daß zulässige und somit a-Gitter Λ mit $d(\Lambda) \geq \Delta$ für alle $\Delta \geq \sqrt{5}$ existieren.

Hilfssatz 4,2: Die Anzahl ganzzahliger Lösungen m von

$$-1 \leq m + n\,x \leq +1 \text{ mit}$$

$$-\frac{n\,\Delta}{2} \leq x \leq -\frac{n\,\Delta}{2} + \frac{1}{2}$$

ist nicht größer als $\frac{n}{2} + 3$.

Der Beweis ist einfach

$$\frac{m}{n} \leq \frac{1}{n} - x \leq \frac{1}{n} + \frac{n\,\Delta}{2}$$

$$\frac{m}{n} \geq -\frac{1}{n} - x \geq -\frac{1}{n} + \frac{n\,\Delta}{2} - \frac{1}{2}$$

$\frac{m}{n}$ liegt in einem Intervall der Länge $\frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}\,n)$, sodaß es für m höchstens $3 + \frac{n}{2}$ Lösungen gibt w.z.b.w.

Dieser Hilfssatz hat die geometrische Bedeutung, daß für alle Gitter Λ mit $Q \in I(\Delta)$ und mit

$$G = m\,P + n\,Q \qquad (n \geq 1, n \text{ fest})$$

höchstens $6 + n$ Werte für m mit $G \in S \subset K$ möglich sind.

Mit $l(\delta)$ wird die Strecke bezeichnet, die $x_2 = x_1 + \delta$ mit einem Ast von K gemeinsam hat, das ist die Strecke zwischen den Schnittpunkten von $x_2 = x_1 + \delta$ mit $x_2 = \pm \frac{1}{x_1^\beta}$ $(\beta \leq 1)$. Es ist zu erwarten, daß $l(\delta)$ von der Größenordnung $\frac{1}{\delta^\alpha}$ ist.

Der Schnittpunkt von $x_2 = x_1 + \delta$ mit $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ ist

$$\left(\bar{x}_1 = -\frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - 1},\ \bar{x}_2 = \frac{\delta}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - 1}\right)$$

Die Gerade $x_2 = \bar{x}_2$ hat mit K ein Intervall der Länge

$$2\,x_1 = \frac{2}{\delta^\alpha \left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\delta^2}}\right)\right]^\alpha} \qquad \alpha = \frac{1}{\beta} \geq 1$$

gemeinsam.

$$2\,x_1 \leq \frac{2}{s_0^\alpha\,\delta^\alpha} \text{ für } \delta \geq \sqrt{5}, \text{ weil}$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\delta^2}}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = s_0 \quad 0 < s_0 < 1$$

Eine einfache geometrische Überlegung lehrt

$$l(\delta) \leq \frac{2}{s_0^\alpha\,\delta^\alpha}\sqrt{2}$$

Für $\delta = n\,\Delta$ gilt

$$l(n\,\Delta) \leq \frac{2}{(s_0\,\Delta)^\alpha\,n^\alpha}\sqrt{2}$$

$$s_0\,\Delta \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5} > 1$$

$$l(n\,\Delta) \leq \frac{c_1}{c_2^\alpha\,n^\alpha} \qquad c_2 > 1$$

Zu diesem Intervall entspricht in $I(\Delta)$ ein Intervall der Länge

$$\frac{1}{n}\,l(n\,\Delta) \leq \frac{1}{n}\,\frac{c_1}{c_2^\alpha\,n^\alpha}$$

und zwar so, wenn bei festem m und n $G = m\,P + n\,Q$ und $G \in l(\delta)$,

dann ist die Länge des Intervalls, das Q durchläuft, gleich $\frac{1}{n}\, l(n\, \Delta)$.

Nach Hilfssatz 4,2 gibt es zu einem festen n höchstens $n+6$ Werte für m, und alle entsprechenden Intervalle in $I(\Delta)$ haben eine Länge

$$l \leq \frac{c_1}{c_2^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{c_1}{c_2^{\alpha}} [\zeta(\alpha) + 6\,\zeta(\alpha+1)] \qquad c_2 > 1$$

Für $\alpha \to \infty$ strebt der Ausdruck rechts gegen Null, und ist für $\alpha \geq \alpha_0$ sicher

$$l < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist die Länge des Intervalls $I(\Delta)$ w.z.b.w.

5.

Mit dieser Methode läßt sich auch folgender Satz beweisen [5].

Satz 5,1: *Die M-Werte des Sternkörpers S enthalten das offene Intervall* $(\sqrt{12}, \sqrt{13})$ *nicht.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß jedes Gitter mit $P = (1,1)$ und $Q \in F'$ nicht zulässig ist. F' ist die Teilmenge von F zwischen den Geraden

$$g_1 \qquad x_2 = x_1 + \sqrt{12}$$

$$g_2 \qquad x_2 = x_1 + \sqrt{13}$$

Für $Q_1 = (-\frac{1}{2}\sqrt{12}, +\frac{1}{2}\sqrt{12})$ wird Λ_1

$$\Lambda_1 \quad \begin{matrix} x_1 = m - \frac{1}{2}\sqrt{12}\, n \\ x_2 = m + \frac{1}{2}\sqrt{12}\, n \end{matrix} \qquad x_1\, x_2 = m^2 - 3\, n^2$$

ein a-Gitter mit $d(\Lambda_1) = \sqrt{12}$. $G = P \pm 2\,Q_1$ liegt auf dem Rand von S. Ebenso für $Q_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2})$

$$\Lambda_2 \quad \begin{matrix} x_1 = m + (-\frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2})\, n \\ x_2 = m + (\ \ \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2})\, n \end{matrix} \qquad x_1\, x_2 = m^2 + m\, n - 3\, n^2$$

$d(\Lambda_2) = \sqrt{13}$, $G = P \pm 2\,Q_2$ auf dem Rand von S. Das Rechteck mit zwei Ecken in $G_1 = P - 2\,Q_1$, $G_2 = P - 2\,Q_2$, außerdem begrenzt von g_1 und g_2 liegt, abgesehen von G_1 und G_2 ganz im Inneren von S. R ist kongruent zu F', jedes Gitter Λ

$$G = m\,P + n\,Q \qquad Q \in F'$$

hat den Gitterpunkt $G = P - 2\,Q$ in $R \subset S^0$ w.z.b.w.

6.

Satz 6,1: *Die Menge der zulässigen Gitter eines unbeschränkten Sternkörpers S ist abgeschlossen und nirgends dicht im Raum aller Gitter Ω.*

$K(X, r)$ bedeutet die offene Kugel mit Mittelpunkt X und Radius r. Es gilt dann

$$\lambda K(X, r) = K(\lambda X, |\lambda| r)$$

$P_1, \ldots, P_n$ ist eine Basis eines beliebigen zulässigen Gitters Λ, U_Λ eine gewisse Umgebung von Λ in Ω. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß alle Gitter Λ' mit Basis $P_1', \ldots. P_n'$

$$P_i' \in K(P_i, \varepsilon) \qquad i = 1, \ldots, n$$

in U_Λ liegen. Jedem Gitterpunkt $P = k_1 P_1 + \ldots + k_n P_n$ des Gitters Λ wird die offene Menge $M(P)$ zugeordnet, die aus allen Punkten P'

$$P' = k_1 P_1' + \ldots + k_n P_n' \qquad P_i' \in K(P_i, \varepsilon)$$

besteht. Für den Fall $P = k_1 P_1$ ist $M(P) = K(P, |k_1| \varepsilon)$. Im allgemeinen Fall aber enthält $M \supset K(P, k\varepsilon)$

$$k = k(P) = \max_{i=1,\ldots n} |k_i| \qquad P = k_1 P_1 + \ldots + k_n P_n$$

Der Radius von $K(P, k\varepsilon)$

$$k\varepsilon \to \infty \text{ für } k \to \infty$$

Für genügend großes k_0 werden die $M(P)$ für $k(P) \geq k_0$ den ganzen Raum überdecken, abgesehen von einem Parallelepiped Π aus den Punkten

$$X = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n \qquad |\lambda_i| \leq k_0 \qquad i = 1, \ldots n$$

Für sogar unendlich viele P mit $k(P) \geq k_0$ ist $M(P) \cap S^0$ nicht leer.

$$P' \in M(P) \cap S^0$$

Λ' bestehend aus den Punkten

$$G = m_1 P_1' + \ldots + m_n P_n' \qquad m_i \text{ ganzzahlig}$$

mit $P' = k_1 P_1' + \ldots + k_n P_n$

ist nicht zulässig. Weil die Menge der nicht zulässigen Gitter offen ist, existiert ein $U^*_{\Lambda'}$ mit

$$U^*_{\Lambda'} \subset U_\Lambda$$

$U^*_{\Lambda'}$ sind nicht zulässig. Daher ist die Menge der zulässigen Gitter nirgends dicht w.z.b.w.

Bemerkung: Die Menge der zulässigen Gitter Λ eines unbeschränkten Sternkörpers S mit $d(\Lambda) = \Delta$ ist abgeschlossen und nirgends dicht im Raum Ω_Δ.

Angenommen Λ enthält eine Umgebung $U_\Lambda \subset \Omega_\Delta$ bestehend aus lauter zulässigen Gittern, dann wären auch alle Gitter $\Gamma \in \lambda U_\Lambda$ für $\lambda \geq 1$ zulässig, was aber nach Satz 6,1 nicht sein kann.

Satz 6,2: *Die Menge* $E_\delta = E\{\Lambda, d(\Lambda) = 1,\ \delta \leq f(\Lambda) \leq 1\}$ *ist abgeschlossen*

$$m(S) = \int_\psi f(\Lambda)\, d\,\mu(\Lambda)$$

existiert; ψ *ist ein Fundamentalbereich von* Ω_1 *bezüglich der Gruppe der ganzzahlig unimodularen Transformationen und* μ *das von Siegel* [6] *eingeführte invariante Maß in* Ω_1.

S_δ ist der Sternkörper $f(X) \leq \delta$, jedes Gitter Λ mit $\delta \leq f(\Lambda) \leq 1$ ist bezüglich S_δ zulässig. E_δ ist also abgeschlossen, somit B meßbar. Wegen der Beschränktheit von $f(\Lambda)$, und weil

$$\int_\psi d\mu(\Lambda) = \varkappa$$

endlich ist, existiert auch $m(S)$ w.z.b.w.

7.

K ist in diesem Abschnitt der Kreis mit Radius $r_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2}$, $\Delta(K) = 1$.

Satz 7,1:

$$m(K) = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \frac{\pi}{r_0}\int_1^{r_0} \sqrt{e^4 - 1}\, de$$

Die Menge A_δ der Λ mit $d(\Lambda) = 1$, für die $f(\Lambda) = \delta$ $0 < \delta \leq 1$ gilt, stimmt mit der Menge der a-Gitter des Kreises K_δ überein. Jedes a-Gitter Λ von K_δ mit $d(\Lambda) = 1$ hat einen Gitterpunkt auf dem Rand von K_δ. Man betrachtet jene von diesen Gittern mit der Basis

$$P = (e, 0) \qquad e = \delta r_0 \qquad 0 < e \leq r_0$$
$$Q = (\xi, 1/e)$$

Fall 1: $e \leq 1$. Λ_0 ist das natürliche Gitter, dann kann Λ dargestellt werden durch

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e & \xi \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \Lambda_0 \qquad |\xi| \leq \frac{e}{2}$$

Fall 2: $1 < e \leq r_0$. Von den Λ mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e & \xi \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \Lambda_0$$

sind die mit $|\xi| < \sqrt{e^2 - 1/e^2}$ nicht zulässig.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e & \xi \\ 0 & 1/e \end{pmatrix} \Lambda_0 \qquad e\sqrt{1 - 1/e^4} \leq |\xi| \leq \frac{e}{2}$$

sind alle zulässig. Alle α-Gitter Γ sind von der Form

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Lambda \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\Gamma = A(\alpha, e, \xi)\, \Lambda_0$$

$$A(\alpha, e, \xi) = \begin{pmatrix} e\cos\alpha & \xi\cos\alpha - 1/e\sin\alpha \\ e\sin\alpha & \xi\sin\alpha + 1/e\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$0 \leq \alpha \leq \pi \quad 0 < e \leq r_0$ 1. für $0 < e \leq 1 \qquad |\xi| \leq \frac{e}{2}$

2. für $1 < e \leq r_0 \quad e\sqrt{1 - \frac{1}{e^4}} \leq |\xi| \leq \frac{e}{2}$

Diese Menge (e, ξ) bildet den Bereich $B_2 \subset R_2$, (e, ξ, α) den zylindrischen Bereich $B_3 \subset R_3$.

Nach der Definition des Integrals in Ω_1, gilt

$$m(K) = \int_{\psi} f(\Lambda)\, d\mu(\Lambda) = \int_{\psi} f(C\,\Lambda_0)\, d\mu(C\,\Lambda_0)$$

Der Definitionsbereich von $f(\Lambda)$ $\Lambda \in \psi$ wird auf einen Kegel

$$\psi^* = \underset{0<\lambda\leq 1}{U}\ \lambda\,\psi$$

erweitert und

$$f^*(\Lambda) = f(d(\Lambda)^{-\frac{1}{n}}\,\Lambda) \qquad \Lambda \in \psi^*$$

gesetzt.

$$m(K) = \int_{\psi^*} f^*(D\,\Lambda_0)\, d\,D$$

nach Definition bedeutet dieses Maß das gewöhnliche euklidische Maß im R_n, aller Matrizen $D \in \Omega$.

$$m(K) = \int_{\psi^*} \delta\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \int \delta\, \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(\lambda, e, \xi, \alpha)}\, d\lambda\, d\, e\, d\,\xi\, d\,\alpha$$

$$m(K) = \int_0^1 d\lambda \int_{B_3} \frac{e}{r_0} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(\lambda, e, \xi, \alpha)} \, d\lambda \, de \, d\xi \, d\alpha$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \lambda A(e, \xi, \alpha)$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(\lambda, e, \xi, \alpha)} =$$

$$= \begin{vmatrix} e\cos\alpha & x\cos\alpha - \frac{1}{e}\sin\alpha & e\sin\alpha & x\sin\alpha + \frac{1}{e}\cos\alpha \\ -\lambda e\sin\alpha & \lambda(-x\sin\alpha - \frac{1}{e}\cos\alpha) & \lambda e\cos\alpha & \lambda(x\cos\alpha - \frac{1}{e}\sin\alpha) \\ 0 & \lambda\cos\alpha & 0 & \lambda\sin\alpha \\ \lambda\cos\alpha & \frac{1}{e^2}\sin\alpha & \lambda\sin\alpha & -\frac{\lambda}{e^2}\cos\alpha \end{vmatrix}$$

was nach Durchrechnung $2\lambda^3$ ergibt.

$$m(K) = \frac{2}{r_0} \int_0^1 \lambda^3 \int_{B_3} e \, de \, d\xi \, d\alpha$$

$$m(K) = \frac{\pi}{2 r_0} \int_{B_2} e \, de \, d\xi$$

$$\int_{B_2} e \, de \, d\xi = \int_0^1 2e \, de \int_0^{e/2} d\xi + \int_1^{r_0} 2e \, de \int_{e\sqrt{1-\frac{1}{e^4}}}^{e/2} d\xi =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{r_0^3}{3} - \frac{1}{3} - 2\int_1^{r_0} \sqrt{e^4 - 1} \, de =$$

$$= \frac{r_0^3}{3} - 2\int_1^{r_0} \sqrt{e^4 - 1} \, de$$

$$m(K) = \frac{\pi}{6} r_0^2 - \frac{\pi}{r_0} \int_1^{r_0} \sqrt{e^4 - 1} \, de \qquad \text{w.z.b.w.}$$

8.

Satz 8,1: *Ist S ein Sternkörper mit $V(S) < \infty$, so haben fast alle Gitter $\Lambda \in \Omega_1$ die Eigenschaft, daß $\Lambda' = \lambda\Lambda$ für ein bestimmtes $\lambda > 0$ a-Gitter wird.*

Für beschränkte Sternkörper ist dieser Satz trivial. Für unbeschränkte folgt er aus dem Satz 6 einer Arbeit von *C. A. Rogers* [7],

daß fast jeder Gitter $\Lambda \in \Omega_1$, nur endlich viele Gitterpunkte im Inneren von S hat.

Fall 1: Λ ist ein zulässiges Gitter, dann wird

$$\Lambda' = \lambda_0 \Lambda \qquad \lambda_0 = \inf_{\lambda\ \Lambda \text{ zulässig}} \lambda$$

gesetzt.

Fall 2: Λ hat endlich viele Gitterpunkte $G_1, \ldots, G_k \in S^0$. Dann ist $f(G_i) > 0\ i = 1, \ldots, k$, denn wäre $f(G_i) = 0$, so wäre auch $f(n G_i) = 0$ für alle ganzen n.

$$\min_{i = 1, \ldots, k} f(G_i) = r$$

$$\Lambda' = \frac{1}{r} \Lambda$$

$$f(\Lambda') = f\left(\frac{1}{r} \Lambda\right) = \frac{1}{r} f(\Lambda) = 1 \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Satz 8,2: *Ist S ein Sternkörper vom endlichen Typus $\Delta(S) = 1$, $V(S) = \infty$, so ist die Menge $E_\delta = \{\Lambda, d(\Lambda) = 1,\ \delta \leq f(\Lambda) \leq 1\}$ vom Maß Null.*

[7] ergibt, daß fast alle $\Lambda \in \Omega_1$ unendlich viele Gitterpunkte in S^0, in gleicher Weise auch in $S_\delta{}^0$ haben, weil

$$V(S_\delta{}^0) = \infty \qquad 0 < \delta \leq 1$$

Die Menge der S_δ zulässigen Gitter hat also Maß Null. Diese Menge stimmt aber mit E_δ überein, so daß

$$\mu(E_\delta) = 0 \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Wird weiters $\delta = \frac{1}{n}\ (n = 1, 2, \ldots)$ gesetzt, so gilt

$$\mu\left(E_{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

$$\mu\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{U}} E_{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

$E_0 = \overset{\infty}{\underset{n=1}{U}} E_{\frac{1}{n}}$ besteht aus allen $\Lambda \in \Omega_1$ mit $0 < f\Lambda) \leq 1$.

Bemerkung:

$$m(S) = \int_{\Psi} f(\Lambda)\, d\mu(\Lambda) =$$

$$= \int_{E\{f(\Lambda)=0\}} f(\Lambda)\, d\mu(\Lambda) + \int_{E_0} f(\Lambda)\, d\mu(\Lambda) = 0$$

$$m(S) = 0$$

für alle unbeschränkten Sternkörper vom endlichen Typus und $V(S) = \infty$.

Literatur

[1] *E. Hlawka*, Jahresberichte der DMV, Bd. **57** (1954)
[2] *K. Mahler*, Proceedings Cambridge, vol. **40** (1944).
[3] *H. Davenport, F. R. S.* und *C. A. Rogers*, Phil. Trans. A, vol. **242** (1949—1950).
[4] *C. A. Rogers*, Archiv der Mathematik, Vol. **4** (1953).
[5] *C. S. Davis*, Quarterly J. (Oxford), (2), **1** (1950).
[6] *C. L. Siegel*, Annals of Math., second series, vol. **46** (1945).
[7] *C. A. Rogers*, Acta mathematica, **94** (1955).

An Algorithm Relating to Symmetric Matrices

By

L. Mirsky, Sheffield

(Received February 20, 1959)

1. If $x_1, \ldots, x_n$ are real numbers, we shall denote by $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ these numbers arranged in non-ascending order of magnitude. If the two sets of real numbers $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_n$ satisfy the relations

$$\bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_k \begin{cases} \leq \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k & (1 \leq k < n) \\ = \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k & (k = n), \end{cases}$$

we shall write $(x_1, \ldots, x_n) \prec (y_1, \ldots, y_n)$.

We recall the following result on symmetric matrices.

THEOREM 1. *Let $a_1, \ldots, a_n$ and $\omega_1, \ldots, \omega_n$ be real numbers. Then the relation*

$$(a_1, \ldots, a_n) \prec (\omega_1, \ldots, \omega_n) \tag{1}$$

is necessary and sufficient for the existence of a real symmetric $n \times n$ matrix with diagonal elements $a_1, \ldots, a_n$ and characteristic roots $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

The necessity of the stated condition is implied by a result of *Ky Fan* [1, Theorem 1]. The sufficiency was established by *Horn* [2, Theorem 5] and, in a different way, by the present author [3, Theorem 2].

While Theorem 1 furnishes us with the condition for the existence of a real symmetric matrix with prescribed diagonal elements and characteristic roots, it is perhaps more natural to seek to prescribe not the characteristic *roots* but the characteristic *polynomial* and to attempt to settle the question of the existence of the requisite matrix by means of rational operations only. In the present note we are concerned with this modified form of the original question.

2. We shall say that a monic polynomial $\chi(x)$ (of any degree) with real coefficients belongs to the class $\mathfrak{N}$ if at least one of the following two conditions is satisfied: (i) the last coefficient of $\chi(x)$ vanishes; (ii) some coefficient of $\chi(x)$ is negative.

LEMMA. *Let $\chi(x)$ be a monic polynomial with real coefficients all of whose zeros are real, and let α be any real number. Then at least one zero of $\chi(x)$ is not smaller than α if and only if $\chi(x+\alpha) \in \mathfrak{N}$.*

It is clearly sufficient to prove the assertion for $\alpha = 0$. For this case it follows at once from a theorem closely related to *Descartes'* rule of signs [4, vol. II, p. 18]. Alternatively, it is easy to give an ad hoc proof by induction with respect to the degree of $\chi(x)$.

We shall, below, make use of the following notation. Suppose that $\chi(x)$ is a monic polynomial of degree n, and denote its zeros by $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Then, for $1 \leq k < n$, we define $\chi^{[k]}(x)$ as the monic polynomial of degree $\binom{n}{k}$ whose zeros are the numbers [1]

$$\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n. \tag{2}$$

Since each elementary symmetric function of the numbers (2) can be expressed as a polynomial in the elementary symmetric functions of $\omega_1, \ldots, \omega_n$, it follows that each of the polynomials $\chi^{[k]}(x)$ can be obtained from the given polynomial $\chi(x)$ by means of a finite chain of rational operations.

3. We now come to our principal result.

THEOREM 2. *Le $a_1, \ldots, a_n$ be given real numbers and $\chi(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots$ a given polynomial with real coefficients. Then the following conditions are necessary and sufficient for the existence of a real symmetric $n \times n$ matrix with diagonal elements $a_1, \ldots, a_n$ and characteristic polynomial $\chi(x)$:*

$$\text{all zeros of } \chi(x) \text{ are real}; \tag{3}$$

$$a_1 + \ldots + a_n = c_1; \tag{4}$$

$$\chi^{[k]}(x + \bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_k) \in \mathfrak{N} \quad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

The necessity of (3) is obvious. Suppose, then, that (3) is satisfied; and denote by $\omega_1 \geq \ldots \geq \omega_n$ the zeros of $\chi(x)$. Then (4) is equivalent to the relation

$$a_1 + \ldots + a_n = \omega_1 + \ldots + \omega_n;$$

and, in view of the lemma, (5) is equivalent to the system of inequalities

$$\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_k \leq \omega_1 + \ldots + \omega_k \quad (1 \leq k < n).$$

[1] Thus $\chi^{[1]}(x) = \chi(x)$.

Thus (4) and (5) are together equivalent to (1); and the assertion now follows by Theorem 1.

4. We conclude by observing that it is always possible to decide by means of a finite number of rational operations whether there exists a real symmetric matrix with prescribed diagonal elements and characteristic polynomial. In view of Theorem 2 and the remark at the end of § 2, it certainly suffices to show that we can determine the *total* number $T(\chi)$ of real zeros of a polynomial χ (multiple ones being counted multiply) by means of a finite chain of rational operations.

Let the coefficients of χ be real, and denote by $D(\chi)$ the number of *distinct* real zeros of χ. There are various algorithms for determining $D(\chi)$, of which the best-known is that given by Sturm's theorem[2]. To find $T(\chi)$, we write $\chi_1 = \chi$ and define[3]

$$\chi_{k+1} = (\chi_k, \chi_k') \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Then, as is easily verified,

$$T(\chi) = \sum_{k=1}^{n} D(\chi_k), \tag{6}$$

where n is the degree of χ. This establishes our assertion.

It may be mentioned that, by combining Sturm's theorem with the identity (6), we are led to the following result.

THEOREM 3. *Let $\chi(x)$ be a polynomial with real coefficients. Write $\chi_1 = \chi$, $\chi_2 = \chi'$, and let the sequence $\{\chi_i\}$ of polynomials be defined inductively by the formula*

$$\chi_{i+1} = \begin{cases} \chi_i' & (\varphi_i = 0) \\ -\varphi_i & (\varphi_i \neq 0), \end{cases}$$

where φ_i denotes the remainder in the division of χ_{i-1} by χ_i. Denote by m the least integer such that χ_m is a constant. Let V^+ be the number of changes of sign in the sequence[4]

$$\operatorname{sgn} \chi_1(x), \ldots, \operatorname{sgn} \chi_m(x)$$

and V^- the number of changes of sign in the sequence

$$\operatorname{sgn} \chi_1(-x), \ldots, \operatorname{sgn} \chi_m(-x).$$

---

[2] For another method, which depends on the calculation of the signature of a quadratic form associated with χ, see [4, vol II, pp. 2—5].

[3] Cf. [4, vol. I, p. 254].

[4] We define $\operatorname{sgn} \chi(x)$ as $+1$ or -1 according as the leading coefficient of $\chi(x)$ is positive or negative.

Then

$$T(\chi) = V^- - V^+.$$

This result can hardly be new, but I have not seen it stated elsewhere.

References

1. *Ky Fan*, On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations (I). Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 652—655 (1949).

2. *A. Horn*, Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix. Amer. J. Math. **76**, 620—630 (1954).

3. *L. Mirsky*, Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements. J. London Math. Soc. **33**, 14—21 (1958).

4. *O. Perron*, Algebra (Berlin and Leipzig, Second edition, 1932—3).

Homologiebedingungen zweiter und dritter Ordnung für die Wesentlichkeit einer Abbildung

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingegangen am 27. Februar 1959)

Die folgenden Untersuchungen zerfallen in drei Teile. Im ersten, der aus Abschnitt 1 und 2 besteht, finden sich Bemerkungen zu bekannten charakteristischen Cozyklen: zu Hinderniscozyklen und Whitneyklassen. Diese Bemerkungen, die jedoch selbständig sind, leiten den zweiten Teil ein. Hier wird ein sogleich erläutertes Problem behandelt: Homologiebedingungen zweiter Ordnung. Der letzte Teil, der nur einen kurzen Abschnitt umfaßt, erklärt Homologiebedingungen dritter Ordnung. Homologiebedingungen, die von höherer als dritter Ordnung sind, bleiben im folgenden unerwähnt. Seien also $m > n$ natürliche Zahlen, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale zusammenhängende Euklidische Mannigfaltigkeit, $f : M \to N$ eine stetige Abbildung und q ein Punkt aus N. Dann kann man annehmen (vgl. z. B. [1]), daß $f^{-1}(q)$ ein Polyeder A einer Dimension $\leq m - n$ ist.

Zunächst sei $\dim A = m - n$. Durch A wird ein in Abschnitt 3 definierter $(m - n)$-Zyklus z bestimmt, der die Eigenschaft hat: wenn $z \not\sim 0$, so ist f wesentlich. Wenn Q eine Sphäre ist, folgt dieses Ergebnis leicht aus [1]. Welche Aussagen lassen sich im Falle $z \sim 0$ über die Wesentlichkeit von f machen? Hierzu werden in Abschnitt 4 Homologiekomponenten

$$z_1, z_2, \ldots$$

des Zyklus z definiert, die die Eigenschaften besitzen: wenn f' zu f homotop und z' der zu f' gehörige $(m - n)$-Zyklus ist, so lassen sich die Homologiekomponenten von z' derart mit $z_1', z_2', \ldots$ bezeichnen, daß $z_i \sim z_i'$ für alle i. Weiter gilt: ist wenigstens einer der Zyklen $z_i \not\sim 0$, so ist f wesentlich. Diese Aussage haben wir oben eine Homologiebedingung zweiter Ordnung genannt. Sind auch sämtliche $z_i \sim 0$, so

gelangt man zu den in Abschnitt 5 behandelten Homologiebedingungen, die wir als solche dritter Ordnung bezeichnen wollen.

Nunmehr seien $0 \leq \dim A = r < m - n$ und P, Q orientierbar. Weiter seien K eine simpliziale Zerlegung von A, σ_i die mit einer Orientierung versehenen r-Simplexe von K und G die Hurewiczsche Homotopiegruppe $\pi_{m-r-1}(S^{n-1})$. Dann entspricht jedem σ_i ein Element α_i aus G, das in Abschnitt 3 definiert ist. Die r-dimensionale Kette $\Sigma\, \alpha_i\, \sigma_i$ ist ein Zyklus bezüglich G und P, der wiederum in Homologiekomponenten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ zerfällt derart, daß f wesentlich ist, sofern wenigstens ein $\tau_i \not\sim 0$.

Ersetzt man die durch $g_0(P) = q$ bestimmte Abbildung g_0 durch eine beliebige stetige Abbildung $g: P \to Q$, so lassen sich, wie dies in den folgenden Abschnitten gelegentlich geschieht, die obigen Aussagen über $f = (f, g_0)$ zu Aussagen über (f, g) erweitern.

1. Eine geometrische Deutung gewisser Whitneyklassen

Sei E ein Euklidischer Raum. Für Punkte a, b aus E bedeute $d(a, b)$ den Abstand. Die weiterhin benutzten Simplexe sind offen und gradlinig. Sind $S_1, S_2, \ldots$ endlich oder abzählbar unendlich viele solcher Simplexe aus E und ist jede beschränkte Teilmenge von E zu fast allen S_i fremd, so heißt im folgenden $\cup\, \overline{S}_i$ ein Polyeder. Eine in E gelegene topologische Mannigfaltigkeit, die ein Polyeder ist, heiße Euklidische Mannigfaltigkeit. Sind S ein Simplex und φ eine eineindeutige simpliziale Abbildung von $\overline{S}$ in E, so heiße $\varphi(S)$ Zelle. Sind $m > n$ natürliche Zahlen, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, q ein Punkt aus M und f eine stetige Abbildung von M in N, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine stetige Abbildung f' von M in N mit $d(f, f') < \varepsilon$ derart, daß $f^{-1}(q)$ ein endliches Polyeder einer Dimension $\leq m - n$ ist.

Seien $n > 2$ eine natürliche Zahl, P eine orientierte n-dimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, S_0 eine $(n-2)$-Sphäre, Q ein Faserraum mit P als Basis, S_0 als Faser, π als Projektion und den orthogonalen Transformationen von S_0 als Gruppe G. Für jeden Punkt p aus P sei $S(p)$ die $(n-2)$-Sphäre $\pi^{-1}(p)$.

Weiter seien K eine simpliziale Zerlegung von P und A_i die n-Simplexe von K, U_i eine in P offene Menge mit $\overline{A}_i \subset U_i$ und λ_i eine topologische Abbildung

$$\lambda_i: U_i \times S_0 \to \pi^{-1}(U_i)$$

auf $\pi^{-1}(U_i)$. Bedeutet λ_{ip} für $p \in U_i$ die durch $\lambda_{ip}(q) = \lambda_i(p, q)$, $q \in S_0$, bestimmte Abbildung: $S_0 \to S(p)$, so sei

$$\lambda_{jp}^{-1} \lambda_{kp} : S_0 \to S_0$$

für alle (j, k, p) mit $p \in U_j \cap U_k$ ein Element aus G, das stetig von p abhängt und als Abbildung von S_0 in sich den Grad 1 hat.

Sind $B_1, B_2, \ldots$ die $(n-2)$-Simplexe von K, so existiert, wie man sich leicht überlegt. eine stetige Abbildung f von $\bigcup \overline{B}_i$ in Q derart, daß

$$f(p) \in S(p) \text{ für alle } p \in \bigcup \overline{B}_i.$$

Seien $C_1, C_2, \ldots$ die $(n-1)$-Simplexe von K.

Wenn C_l ein bestimmtes C_i und $U_j \neq U_k$ zwei derjenigen U_i sind, die $\overline{C}_l$ enthalten, so setzen wir

$$\alpha_j(p) = \lambda_{jp}^{-1} f(p) \text{ und } \alpha_k(p) = \lambda_{kp}^{-1} f(p)$$

für alle Punkte p aus $\overline{C}_l - C_l$. Die Abbildungen α_j und α_k der $(n-2)$-Sphäre $\overline{C}_l - C_l$ in die $(n-2)$-Sphäre S_0 sind homotop, da

$$\alpha_k(p) = \lambda_{kp}^{-1} \lambda_{jp} \lambda_{jp}^{-1} f(p),$$

weiter $\lambda_{kp}^{-1} \lambda_{jp}$ nach Voraussetzung den Grad 1 hat, Abbildungen mit dem gleichen Grad homotop sind und daher $\lambda_{kp}^{-1} \lambda_{jp}$ zur Identität homotop ist.

Sind x_l eine Orientierung von C_l, y_l die von x_l in $\overline{C}_l - C_l$ induzierte Orientierung und ξ_l der Grad der Abbildung $\alpha_j : y_l \to S_0$, so ist $\Sigma \xi_i x_i$ eine ganzzahlige $(n-1)$-Kette. Von der besonderen Wahl der Orientierung x_l von C_l ist sie unabhängig.

Nach einer Methode von *Whitney* [8] kann man zeigen, daß $\Sigma \xi_i x_i$ Cozyklus und daß die $(n-1)$-dimensionale Cohomologieklasse X von $\Sigma \xi_i x_i$ von der Abbildung f unabhängig ist.

Durch die Poincarésche Dualität entspricht der $(n-1)$-dimensionalen Coklasse X eine 1-dimensionale Homologieklasse H. Wegen $n > 2$ gibt es in P eine orientierte doppelpunktfreie geschlossene Kurve Z mit $Z \in H$. Hierauf gilt:

Es existiert ein Feld φ über P bezüglich Q, so daß die Menge der Singularitäten von φ gleich Z ist. Ist φ' irgendein Feld über P und die Menge der Singularitäten von φ' eine orientierte doppelpunktfreie geschlossene Kurve Z', so gibt es eine ganze Zahl γ mit

$$Z \sim \gamma Z'$$

bezüglich P. Existiert ein singularitätenfreies Feld über P, so ist $Z \sim 0$.

Dabei heiße jede stetige Abbildung φ von $P - Z$ in Q mit $\varphi(p) \in S(p)$ für alle Punkte $p \in P - Z$ ein „Feld über P mit Z als Singularitätenmenge". Ein Feld ohne Singularitäten heiße stetiges Feld. *Dann ist für* $n = 3$ *die Beziehung* $Z \sim 0$ *auch hinreichend für die Existenz eines stetigen Feldes.* Für $n > 3$ treten außer dem „Hindernis" Z noch Hindernisse höherer Ordnung auf.

2. Vom Tietzeschen Fortsetzungssatz zur Cotheorie der Hindernisse

Wie in der Einleitung seien $m > n$ natürliche Zahlen, P eine m-dimensionale und Q eine n-dimensionale zusammenhängende Euklidische Mannigfaltigkeit, weiter A ein in P gelegenes Polyeder und f eine stetige Abbildung von A in Q. Welches sind Bedingungen, daß sich f zu einer Abbildung von P in Q ergänzen läßt? Hierzu seien a ein Punkt aus Q und B die Begrenzung von A bezüglich P. Ähnlich wie in der Einleitung bestimmt dann $f^{-1}(a)$ einen $(m - n)$-Zyklus z modulo B. Es zerfällt z wie dort in Homologiekomponenten

$$Z_i \text{ modulo } B,$$

die über die Fortsetzbarkeit von f entscheiden. Dies sei hier wenigstens erwähnt, obschon es weiterhin nicht ausgenutzt wird. An einige Ergebnisse aus der Fortsetzungstheorie sei jedoch erinnert. Ein Satz von *Tietze* [5], der bei solcher Gelegenheit stets zitiert wird, lautet: Sind X ein metrischer Raum, Y eine abgeschlossene Teilmenge von X und E ein Euklidischer Raum, so läßt sich jede stetige Abbildung von Y in E über X stetig fortsetzen.

Hierauf seien M ein Polyeder, N ein topologischer Raum, K eine simpliziale Zerlegung von M, K^i für alle i das i-dimensionale Gerüst von K, M^i das durch K^i bestimmte i-dimensionale Polyeder, j eine natürliche Zahl und f eine stetige Abbildung von M^j in N. Wann läßt sich f über M stetig fortsetzen? Hierzu wollen wir, wie dies in der Literatur (vgl. z. B. [5]) häufig geschieht, voraussetzen, N sei in den Dimensionen $i = j + 2, j + 3, \ldots, r = \dim N$ einfach mit folgender Definition der „Einfachheit" in der Dimension i: Bedeute q einen festen Punkt aus N; sind dann S eine i-Sphäre, q_0 ein Punkt aus S und σ, σ' irgend zwei homotope Abbildungen von S in N mit $\sigma(q_0) = \sigma'(q_0) = q$, so lassen sich σ und σ' unter Festhaltung in q_0 ineinander deformieren.

Das Problem, f über M^{j+1} stetig fortzusetzen, ist ein lokales Problem. Denn auf der Begrenzung eines jeden $(j+1)$-Simplexes aus K ist ja f definiert. Seien f^{j+1} eine stetige Fortsetzung von f über M^{j+1} und $A_1, A_2, \ldots$

die $(j+2)$-Simplexe aus K, x_i eine Orientierung von A_i, y_i die von x_i in die $(j+1)$-Sphäre $\overline{A}_i - A_i$ induzierte Orientierung und ξ_i das durch $f^{j+1}: y_i \to N$ bestimmte Element der Hurewiczschen Homotopiegruppe $G = \pi_{j+1}(N)$. Dann ist $\Sigma\, \xi_i\, x_i$ ein $(j+2)$-dimensionaler Cozyklus c^{j+2} bezüglich N und G, der die Eigenschaft hat: eine stetige Fortsetzung von f über M^{j+2} existiert, wenn c^{j+2} cohomolog Null ist. Dabei stimmt also f^{j+2} auf M^j mit f, jedoch nicht notwendig auf M^{j+1} mit f^{j+1} überein. Insgesamt gelangt man zu einer Folge von Cocyklen $c^{j+2}, c^{j+3}, \ldots, c^r$, die die Eigenschaften haben: existiert f^{j+1} und ist jeder der Cocyklen c^i cohomolog Null, so existiert eine stetige Fortsetzung von f über M.

Auf die obige Einschränkung, N sei in den Dimensionen $j+2$, $j+3, \ldots, r$ einfach, kann man heute verzichten, wie aus neueren Sätzen der Lerayschen Garbentheorie (vgl. [2] und [3]) hervorgeht. Der obige Fall (M, N) läßt sich weiter dadurch verallgemeinern, daß man statt des Produktes $M \times N$ einen Faserraum mit M als Basis und N als Faser betrachtet. Man vergleiche auch [5].

Seien $m > n$ natürliche Zahlen und M_1, M_2 zwei homogene m-dimensionale endliche Polyeder im Euklidischen Raume E, N eine Euklidische Mannigfaltigkeit, q ein Punkt aus N und $f_i: M_i \to N$ für $i = 1, 2$ eine stetige Abbildung, weiter $f_i^{-1}(q)$ ein endliches Polyeder A_i und

$$f_1 \mid M_1 \cap M_2 = f_2 \mid M_1 \cap M_2,$$

ferner f die durch $f \mid M_i = f_i$ bestimmte Abbildung von $M_1 \cup M_2$ in N. Es bezeichne K eine simpliziale Zerlegung von $A_1 \cup A_2$, die in A_i eine simpliziale Zerlegung K_i induziert. Seien $r \leq m - n$ die Dimension von K, x_{ij} die mit einer Orientierung versehenen r-Simplexe von K_i und α_{ij} das im nächsten Abschnitt definierte Element der Gruppe $\pi_{m-r-1}(S^{n-1})$. Der Rand R_i von M_i bestehe aus allen Punkten von M_i, die bezüglich M_i keine m-dimensionale Zellenumgebung haben. Sei R der entsprechend erklärte Rand von $M_1 \cup M_2$. Dann ist $\Sigma_j\, \alpha_{ij}\, x_{ij}$ ein Zyklus z_i modulo B_i und $\Sigma\, \Sigma\, \alpha_{ij}\, x_{ij}$ ein Zyklus z modulo B. Wie hängen z_1, z_2 und z voneinander ab? Dieses Problem gehört einesteils in die Fortsetzungstheorie, da ja f eine Fortsetzung von f_i ist, andererseits ist es ein Additionsproblem wie die in [7] behandelte Frage. Überhaupt lassen sich Sätze über Summen von Polyedern für die Theorie der Fortsetzungen stetiger Abbildungen nutzbar machen.

3. Über einen charakteristischen Zyklus

Seien $m > n$ natürliche Zahlen, r eine natürliche Zahl $\leq m - n$, A ein m-Simplex, B ein n-Simplex, C ein r-Simplex in A, weiter a, b, c beziehungsweise eine Orientierung von A, B, C. Seien φ, γ stetige Abbildungen von $\overline{A}$ in $\overline{B}$ mit $\varphi(p) \neq \gamma(p)$ für alle $p \in \overline{A} - \overline{C}$. Dann bezeichnet *bis zum Schluß der Arbeit*

$$\zeta(a, b, c, \varphi, \gamma)$$

das wie folgt bestimmte Element der Hurewiczschen Homotopiegruppe $\pi_{m-r-1}(S^{n-1})$. Seien q ein Punkt aus C, D ein $(m - r)$-Simplex senkrecht zu C mit $C \cap D = q$ und $\overline{D} \subset A$ und E die $(m - r - 1)$-Sphäre $\overline{D} - D$. Für $p \in E$ bedeute $\chi(p)$ die Projektion von $\varphi(p)$ auf $\overline{B} - B$ aus $\gamma(p)$. Dann ist χ eine stetige Abbildung von E in die $(n - 1)$-Sphäre $\overline{B} - B$. Es sei b' die von b in $\overline{B} - B$ induzierte Orientierung. Seien d eine Orientierung von D, so daß (c, d) die Orientierung a liefert, und e die von d in E induzierte Orientierung. Dann bestimmt $\chi : b' \to e$ eindeutig eine Abbildung: $S^{m-r-1} \to S^{n-1}$. Die Homotopieklasse dieser Abbildung ist $\zeta(a, b, c, \varphi, \gamma)$.

Seien wie im letzten Absatz $m > n$ natürliche Zahlen, P eine m-dimensionale und Q eine n-dimensionale orientierte offene oder geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, weiter α, β Homotopieklassen von P in Q. Dann existiert in α eine Abbildung f und in β eine Abbildung g derart, daß die Menge A aller Punkte $p \in P$ mit $f(p) = g(p)$ ein Polyeder einer Dimension $r \leq m - n$ ist. Durch A wird wie folgt ein r-dimensionaler Zyklus mit Koeffizienten aus der Gruppe $G = \pi_{m-r-1}(S^{n-1})$ bestimmt. Seien K eine simpliziale Zerlegung von A, σ_i die mit einer Orientierung versehenen r-Simplexe von K und ζ_i das im ersten Absatz definierte Element $\zeta(\sigma_i, P, Q, f, g)$ der Gruppe G. *Dann ist* $\Sigma \zeta_i \sigma_i$ *ein Zyklus bezüglich* G *und* P. Sind $A_1, A_2, \ldots$ die Komponenten von A, σ_{ij} die in A_i liegenden σ_k und $\zeta_{ij} = \zeta(\sigma_{ij}, P, Q, f, g)$, so ist *jede einzelne der Ketten*

$$\Sigma_j \zeta_{ij} \sigma_{ij}, \; i = 1, 2, \ldots,$$

ein Zyklus bezüglich G *und* P.

Für den Fall $m - n = r = 1$ sind die Aussagen dieses Abschnittes in meiner Arbeit: Monatshefte für Mathematik **62**, 163—172 (1958), bewiesen.

4. Homologiebedingungen für die Wesentlichkeit einer Abbildung

Sind $m > n$ natürliche Zahlen, M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, q ein Punkt aus N, f eine stetige Abbildung von M in N, $f^{-1}(q)$ ein $(m-n)$-dimensionales Polyeder A und $A_1, A_2, \ldots$ die Komponenten von A, so bestimmt jedes A_i einen $(m-n)$-Zyklus y_i. Die y_i lassen sich zu Homologieklassen $z_1, z_2, \ldots$ zusammenfassen mit der Eigenschaft: ist wenigstens ein $z_i \nsim 0$, so ist f wesentlich. Die Aussage, f sei wesentlich, wenn wenigstens ein $y_i \nsim 0$, ist übrigens nicht richtig. Diese Gedanken, die schon in der Einleitung erläutert sind, sollen nun präzisiert werden. Dabei werden zunächst über M und N, dann über m, n einschränkende Voraussetzungen gemacht, die aber nur dem Zwecke dienen, die folgenden Definitionen und Beweise abzukürzen.

Seien $m > n$ natürliche Zahlen, U ein m-Simplex, V ein n-Simplex, W ein $(m-n)$-Simplex in U, weiter u, v, w beziehungsweise eine Orientierung von U, V, W. Seien φ eine stetige Abbildung von $\overline{U}$ in $\overline{V}$, r ein fester Punkt aus V und $\varphi(p) \neq r$ für alle $p \in \overline{U} - \overline{W}$. Dann bezeichnet bis zum Schlusse dieses Abschnittes $\zeta(u, v, w, \varphi, r)$ folgende Zahl. Bedeutet γ die durch $\gamma(\overline{U}) = r$ bestimmte Abbildung von $\overline{U}$ in $\overline{V}$, so ist nach einer Definition des dritten Abschnittes $\zeta(u, v, w, \varphi, \gamma)$ ein Element von $\pi_{n-1}(S^{n-1})$. Hierauf ist $\xi(u, v, w, \varphi, r)$ der Grad dieses Elementes.

Weiter seien $m > n$ natürliche Zahlen, P eine m-dimensionale und Q eine n-dimensionale orientierte Euklidische Mannigfaltigkeit, a ein Punkt aus Q und f eine stetige Abbildung von P in Q. Wie oben bemerkt wurde, kann man weiterhin annehmen, daß $f^{-1}(a)$ ein $(m-n)$-dimensionales Polyeder A ist. Seien $A_1, A_2, \ldots$ die Komponenten von A und K_i eine simpliziale Zerlegung von A_i. Wenn $\dim A_i < m - n$, sei $y_i = 0$. Sonst seien σ_{ij} die mit einer Orientierung versehenen $(m-n)$-Simplexe von K_i und ξ_{ij} die Zahl $\xi(\sigma_{ij}, P, Q, f, a)$. Die Kette $\Sigma_j \xi_{ij} \sigma_{ij}$ ist ein ganzzahliger $(m-n)$-dimensionaler Zyklus y_i, wie schon im letzten Abschnitt bemerkt wurde.

Wenn A_k, A_l zwei der A_i sind, weiter eine in P gelegene Kurve $(b_\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ mit $b_0 \in A_k, b_1 \in A_l$ existiert und die geschlossene Kurve $(f(b_\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ innerhalb Q nullhomolog ist, so mögen A_k und A_l zur gleichen „*Homologiekomponente*" von (f, a) gehören. Sind $\beta(1) < \beta(2) < \ldots$ natürliche Zahlen und bilden die

$$A_{\beta(i)}, i = 1, 2, \ldots,$$

eine Homologiekomponente von (f, a), so ist $\Sigma_i y_{\beta(i)}$ ein „*Lösungszyklus*" von (f, a). Zum zweidimensionalen Fall vergleiche man auch [4].

Sind $B_1, B_2, \ldots$ die Homologiekomponenten von (f, a), L_i eine simpliziale Zerlegung von B_i und z_i der zu L_i gehörige Lösungszyklus von (f, a), so wollen wir sagen, es seien $z_1, z_2, \ldots$ „die" Lösungszyklen von (f, a), wenngleich diese letzteren ja nur bis auf Unterteilungen eindeutig bestimmt sind.

Theorem. *Seien P eine $(n+1)$-dimensionale und Q eine n-dimensionale orientierte geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, a ein Punkt aus Q, A eine in P gelegene $(n+1)$-Zelle, B eine in Q gelegene n-Zelle und f, f' stetige Abbildungen von P in Q, weiter $f \mid P - A = f' \mid P - A$, $f(\overline{A}) \cup f'(\overline{A}) \subset B$ und $f^{-1}(a)$ wie $f'^{-1}(a)$ ein eindimensionales endliches Polyeder. Es mögen nichtberandende Lösungszyklen von (f, a) existieren, und es seien*

$$z_1, z_2, \ldots$$

dieselben. Dann besitzt auch (f', a) nichtberandende Lösungszyklen, und diese lassen sich derart mit $z_1', z_2', \ldots$ bezeichnen, daß $z_i \sim z_i'$ für alle i.

Beweis. Es gibt eine in P gelegene $(n+1)$-Zelle A_1 mit $A \subset A_1$, $f(\overline{A}_1) \cup f'(\overline{A}_1) \subset B$ und der Eigenschaft, daß $(\overline{A}_1 - A_1) \cap f^{-1}(a)$ aus höchstens endlich vielen Punkten besteht. Setzt man $C = \overline{A}_1 \cap f^{-1}(a)$ und $C' = \overline{A}_1 \cap f'^{-1}(a)$, so gehören offenbar alle Punkte aus C zur gleichen Homologiekomponente D von (f, a) alle Punkte aus C' zur gleichen Homologiekomponente D' von (f', a).

Seien K derart eine simpliziale Zerlegung von D, daß jedes 1-Simplex aus K in A_1 liegt oder zu $\overline{A}_1$ fremd ist, und K' eine simpliziale Zerlegung von D', die auf $P - A_1$ mit K übereinstimmt. Weiter seien y der durch K bestimmte Lösungszyklus von (f, a) und y' der durch K' bestimmte Lösungszyklus von (f', a). Zum Nachweis des obigen Satzes genügt es dann zu zeigen, daß $y \sim y'$. Das ist aber gerade der Inhalt des nachstehenden Hilfssatzes. Denn $y - y'$ liegt in $\overline{A}_1$.

Lemma 1. *Seien S ein $(n+1)$- und T ein n-Simplex, σ, τ Orientierungen von S bzw. T, a ein Punkt aus T und f_0, f_1 stetige Abbildungen von $\overline{S}$ in T, weiter $f_0 \mid \overline{S} - S = f_1 \mid \overline{S} - S$ und $(f_i)^{-1}(a)$ für $i = 0, 1$ ein endliches Polyeder A_i einer Dimension ≤ 1, K_i eine simpliziale Zerlegung von A_i. Wenn $\dim A_i = 0$, so sei $y_i = 0$. Sonst seien σ_{ij} die mit einer Orientierung versehenen 1-Simplexe von K_i, ξ_{ij} die oben definierte Zahl $\xi(\sigma_{ij}, \sigma, \tau, f_i, a)$ und $y_i = \Sigma_j \xi_{ij} \sigma_{ij}$. Dann ist $y_0 - y_1 \sim 0$.*

Beweis. Seien R ein $(n+2)$-Simplex mit S als Seite. Man kann annehmen, daß R gleichseitig ist. Bezeichne S_1 die $(n+1)$-Zelle $(\overline{R}-R)-\overline{S}$. Für $p \in \overline{R}-R$ sei $w(p)$ die senkrechte Projektion von p auf $\overline{S}$. Setzt man dann $f \mid \overline{S} = f_0$ und $f \mid \overline{S}_1 = f_1 w$, so ist w eine stetige Abbildung der $(n+1)$-Sphäre $\overline{R}-R$ in T mit $f^{-1}(a) = A_0 \cup w^{-1}(A_1)$. Seien ϱ eine Orientierung von $\overline{R}-R$, weiter

$$\eta_{0j} = \xi(\sigma_{0j}, \varrho, \tau, f, a) \text{ und } \eta_{1j} = \xi(w^{-1}(\sigma_{1j}), \varrho, \tau, f, a).$$

Einer Bemerkung aus Abschnitt 3 zufolge ist dann

$$\Sigma\, \eta_{0j}\, \sigma_{0j} + \Sigma\, \eta_{1j}\, w^{-1}(\sigma_{1j})$$

ein ganzzahliger Zyklus z. Wie man sich leicht überlegt, ist $\eta_{0j} = \xi_{1j}$ und $\eta_{1j} = -\xi_{1j}$, mithin

$$0 = w(\dot{z}) = (w(z))^{\cdot} = (\Sigma\, \xi_{0j}\, w(\sigma_{0j}) - \Sigma\, \xi_{1j}\, \sigma_{1j})^{\cdot}.$$

Nun ist $w(\sigma_{0j}) = \sigma_{0j}$, also $(\Sigma\, \xi_{0j}\, \sigma_{0j} - \Sigma\, \xi_{1j}\, \sigma_{1j})^{\cdot} = 0$, wie behauptet.

Wie man sieht, ist das obige Theorem nur ein lokaler Satz, obschon formal Abbildungen im Großen auftreten. Doch reicht sein Inhalt bereits aus, um mit Hilfe geometrischer Operationen die lokalen Bedingungen zu eliminieren. Dies soll nun geschehen.

Sind P, Q Euklidische Mannigfaltigkeiten, A eine in P und B eine in Q offene Zelle, weiter $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie von P in Q und

$$f^\tau \mid P - A = f^0 \mid P - A,\ f^\tau(\overline{A}) \subset B \text{ für alle } \tau,$$

so heiße $\{f^\tau\}$ eine „lokale Homotopie" bezüglich (A, B).

Lemma 2. *Sind P, Q geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten und f, f' homotope Abbildungen von P in Q, so lassen sich f und f' mittels endlich vieler lokaler Homotopien ineinander überführen.*

Beweis. Offenbar existieren eine natürliche Zahl r, eine f in f' überführende Homotopie $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq r)$ und eine simpliziale Zerlegung K von P mit den Eigenschaften: zu jedem Simplex S aus K und jeder der Zahlen $i = 0, \ldots, r-1$ gibt es eine in P offene Zelle A und eine in Q offene Zelle B, so daß $\overline{S} \subset A$ und $f^\tau(\overline{A}) \subset B$ für $i \leq \tau \leq i+1$.

Statt Lemma 2 genügt es also zu zeigen: Seien $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie von P in Q und K eine simpliziale Zerlegung von P. Zu jedem Simplex S aus K existiere eine in P offene Zelle A mit $\overline{S} \subset A$ und eine in Q offene Zelle B, so daß $g^\tau(\overline{A}) \subset B$ für alle τ. Dann lassen sich g^0 und g^1 mittels endlich vieler lokaler Homotopien ineinander überführen.

Zum Beweis der letzteren Behauptung seien δ die Dimension von P und $S_1, \ldots, S_m$ die δ-Simplexe von K, weiter A_i eine in P offene Zelle mit $\overline{S}_i \subset A_i$ und B_i eine in Q offene Zelle mit $g^\tau(\overline{A}_i) \subset B_i$ für alle τ.

Seien S_0 die leere Menge und j eine der Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, es existiere eine stetige Abbildung h von P in Q und eine stetige Abbildung λ von P in $[0, 1]$, so daß

$$h(p) = g^{\lambda(p)}(p) \text{ für alle } p \in P,\ \lambda(\overline{S}_0 \cup \ldots \cup \overline{S}_j) = 1$$

und daß sich g^0 durch endlich viele lokale Homotopien in h überführen läßt. Setzt man dann

$$\mu(p) = d(p, P - A_{j+1})/(d(p, P - A_{j+1}) + d(p, S_{j+1})),$$

$$\nu(p, \tau) = (1 - \mu(p)\,\tau)\,\lambda(p) + \mu(p)\,\tau,$$

$$h^\tau(p) = g^{\nu(p,\tau)}(p)$$

in allen (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, so ist h^1 eine Abbildung, die die Möglichkeit des $(j+1)$-ten Schrittes nachweist.

Lemma 3. *Seien P eine $(n+1)$-dimensionale und Q eine n-dimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, weiter f, f' homotope Abbildungen von P in Q, a ein Punkt aus Q und $f^{-1}(a)$ wie $f'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1. Dann existieren stetige Abbildungen $g_0, \ldots, g_m$ von P in Q, in P gelegene $(n+1)$-Zellen $A_1, \ldots, A_m$ und in Q gelegene n-Zellen $B_1, \ldots, B_m$ mit $g_0 = f$, $g_m = f'$ und den weiteren Eigenschaften: für alle i ist*

$$g_{i+1} \mid P - A_i = g_i \mid P - A_i,\ g_{i-1}(\overline{A}_i) \cup g_i(\overline{A}_i) \subset B_i$$

und $g_i^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1.

Beweis. Nach Lemma 2 existieren in P gelegene $(n+1)$-Zellen, $A_1, \ldots, A_m$, in Q gelegene n-Zellen $B_1, \ldots, B_m$ und eine f in f' überführende Homotopie $(f_\tau, 0 \leq \tau \leq m)$ derart, daß $(f_\tau, i-1 \leq \tau \leq i)$ für alle i eine lokale Homotopie bezüglich (A_i, B_i). Dann ist also $f_0 = f$, $f_m = f'$ und $f_{i-1} \mid P - A_i = f_i \mid P - A_i$, $f_{i-1}(\overline{A}_i) \cup f_i(\overline{A}_i) \subset B_i$ für alle i. Bezeichnet ε eine hinreichend kleine positive Zahl, so gelten für jede stetige Abbildung g von P in Q und alle Zahlen $i = 0, \ldots, m$ mit $d(f^i, g) < \varepsilon$ die Beziehungen

$$g(\overline{A}_i) \subset B_i \text{ und } g(\overline{A}_{i+1}) \subset B_{i+1}.$$

Sei j eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, es existierten stetige Abbildungen $g_0, \ldots, g_j$ von P in Q mit

den in Lemma 3 verlangten Eigenschaften und der zusätzlichen Eigenschaft, daß $d(f_i, g_i) < \varepsilon$ für $i = 0, \ldots, j$.

Zur Erklärung von g_{j+1} setzen wir zunächst $g_{j+1} \mid P - A_{j+1} = g_j \mid P - A_{j+1}$. Wegen $f_j \mid P - A_{j+1} = f_{j+1} \mid P - A_{j+1}$ und $d(f_j, g_j) < \varepsilon$ ist dann

$$d(f_{j+1} \mid P - A_{j+1},\ g_{j+1} \mid P - A_{j+1}) < \varepsilon,$$

nach der Erklärung von ε weiter $g_{j+1}(\overline{A}_{j+1} - A_{j+1}) \subset B_{j+1}$. Andererseits ist $f_{j+1}(\overline{A}_{j+1}) \subset B_{j+1}$. Und man kann annehmen, daß auf $\overline{A}_{j+1} - A_{j+1}$ höchstens endlich viele a-Stellen von g_{j+1} liegen. Um den Beweis zu Ende zu führen, braucht es deshalb nur noch eine Anwendung des nachfolgenden Hilfssatzes.

Lemma 4. *Sind S ein $(n+1)$-Simplex, T ein n-Simplex, a ein Punkt aus T, ε eine positive Zahl, f eine stetige Abbildung von $\overline{S}$ in T, g eine stetige Abbildung von $\overline{S} - S$ in T, weiter $d(f \mid \overline{S} - S, g) < \varepsilon$ und ist $g^{-1}(a)$ endlich, so gibt es eine stetige Fortsetzung g' von g über $\overline{S}$ mit $d(f, g') < \varepsilon$ und der Eigenschaft, daß $g'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.*

Beweis. Seien δ eine positive Zahl, q ein Punkt aus S und $w(p)$ für $p \in \overline{S} - q$ die Projektion von p auf $\overline{S} - S$ aus q. Dann gibt es ein $(n+1)$-Simplex U mit $q \in U$, $\overline{U} \subset S$ und eine stückweis affine Abbildung γ von $\overline{U} - U$ in T mit den Eigenschaften: $d(f \mid \overline{U} - U, \gamma) < \varepsilon$, die Menge $\gamma^{-1}(a)$ ist endlich, für alle $p \in \overline{U} - U$ ist

$$d(p,\ w(p)) < \delta \text{ und } d(\gamma(p),\ gw(p)) < \delta.$$

Für alle Punkte $(1 - \tau)\, p + \tau w(p)$ mit $p \in \overline{U} - U$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei nun $g'(p)$ der Punkt $(1 - \tau)\, \gamma(p) + \tau g w(p)$. Diese Erklärung befriedigt Lemma 4, sofern nur δ hinreichend klein ist.

Weiter seien K eine simpliziale Zerlegung von $\overline{U}$, L der in $\overline{U} - U$ liegende Teil von K und g' auf jedem Simplex von L affin. Für jeden Eckpunkt e aus $K - L$ bedeute $g'(e)$ einen Punkt aus $T - a$ mit hinreichend kleinem $d(f(e), g'(e))$ und der Eigenschaft, daß die Punkte $g'(e)$ in allgemeiner Lage sind. Dadurch wird eine simpliziale Abbildung $g' \mid \overline{U} : \overline{U} \to T$ bestimmt, die in Lemma 4 aufgezählten Eigenschaften hat, sofern K hinreichend fein ist.

Aus dem obigen Theorem und Lemma 3 folgt:

Theorem. *Seien P eine $(n+1)$-dimensionale und Q eine n-dimensionale orientierte geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, a ein Punkt aus Q, weiter f, f' homotope Abbildungen von P in Q und $f^{-1}(a)$ wie $f'^{-1}(a)$ ein eindimensionales endliches Polyeder. Es mögen nichtberandende*

Lösungszyklen von (f, a) existieren, und es seien $z_1, z_2, \ldots$ dieselben. Dann besitzt auch (f', a) nichtberandende Lösungszyklen, und diese lassen sich derart mit $z_1', z_2', \ldots$ bezeichnen, daß $z_i' \sim z_i'$ für alle i.

Befindet sich unter den Lösungszyklen von (f, a) ein nichtberandender, so ist also f wesentliche Abbildung, wie es in der Einleitung behauptet wird.

5. Eine Verschlingungskonstante

Als eine erste Homologiebedingung für die Wesentlichkeit einer Abbildung war schon in der Einleitung erwähnt worden: der durch ein reziprokes Punktbild bestimmte Zyklus ist nicht nullhomolog. Genauer seien wieder $m > n$ natürliche Zahlen, P eine m-dimensionale und Q eine n-dimensionale orientierte zusammenhängende geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, a ein Punkt aus Q, f eine stetige Abbildung von P in Q und $f^{-1}(a)$ ein endliches r-Polyeder A mit $r \leq m - n$. Dann bestimmt A einen r-dimensionalen Zyklus z, wie er oben definiert ist. Für den Fall $z \sim 0$ hatten wir im letzten Abschnitt eine zweite Homologiebedingung aufgestellt: Sind $z_1, z_2, \ldots$ die Homologiekomponenten von z und ist $z_i \not\sim 0$ für wenigstens ein i, so ist f wesentlich. Seien nun alle z_i berandend und y_i eine in P gelegene $(r+1)$-Kette mit $\dot{y}_i = z_i$. Wir wollen $m = 2n - 1$ und $r = m - n$ setzen. Dann sind die z_i ganzzahlige $(n-1)$-Zyklen. Für alle $j \neq k$ ist eine Verschlingungszahl ω_{jk} von (z_j, z_k) definiert: die Schnittzahl von y_j mit z_k. Und es besteht als dritte Homologiebedingung die Beziehung: wenn wenigstens ein $\omega_{jk} \neq 0$, so ist f wesentlich.

Literatur

[1] *Eilenberg, S. On continuous mappings of manifolds into spheres.* Ann. of Mathem. 41, 662—673 (1940).

[2] *Godement, R. Théorie des faisceaux.* Act. sci. et industrielles Paris 1252 (1958).

[3] *Leray, J. L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue.* Liouville Journal 29, 1—139 (1950).

[4] *Nielsen, J. Surface transformation classes of algebraically finite type.* Kgl. Dänische Akad. Wiss. 21, 1—89 (1944).

[5] *Steenrod, N. Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions.* Princeton Univ. Coll. Lectures (1957).

[6] *Tietze, H. Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind.* Crelle Journal 145, 9—14 (1914).

[7] *Vietoris, L. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe.* Monatsh. für Mathem. 37, 159—162 (1930).

[8] *Whitney, H. On the theory of sphere bundles.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 26, 148—153 (1940).

Über geränderte Determinanten und bedingte Trägheitsindizes quadratischer Formen*

Von

Alexander Ostrowski, Basel

(Eingegangen am 16. März 1959)

1. Im Zusammenhang mit der Theorie der relativen Extrema bei Funktionen mehrerer Variablen ist wiederholt die Frage diskutiert und gelöst worden, Kriterien für die Definitheit einer quadratischen Form auf einer linearen Mannigfaltigkeit aufzustellen.[1] Diese Kriterien genügen aber nicht zur vollständigen Behandlung der Bedingungen zweiter Ordnung, da ja auch der Fall des *Nichtbestehens des Extremums* unter Benutzung der Bedingungen zweiter Ordnung behandelt werden kann. Es ist daher von Interesse, das Problem der Trägheitsindizes einer quadratischen Form auf einer linearen Mannigfaltigkeit in voller Allgemeinheit vorzunehmen. Bei dieser Gelegenheit ergeben sich auch die Kriterien für die Definitheit in weniger spezieller Form, als in den zitierten Abhandlungen.

Der Ausgangspunkt für die Schostaksche Behandlung bildet eine Identität in der Theorie der quadratischen Formen, die er durch etwas umständliche Determinantenumformungen beweist. Wir beginnen mit der Herleitung — im Abschnitt I — einer Verallgemeinerung dieser Identität auf beliebige Bilinearformen, die besonders einfach und direkt bewiesen wird. In den Abschnitten II und III geben wir die Regeln zur Aufstellung der Trägheitsindizes und besprechen im Abschnitt IV die Anwendung auf das Problem der relativen Extrema.

---

* Diese Arbeit ist entstanden im Rahmen eines Forschungsauftrages des National Bureau of Standards an the American University, Washington, D. C. Ich danke für Diskussionen den Herren Dr. *We. Gautschy* und Dr. *M. Newman*.

[1] Man vgl. z. B. *H. Hancock*, Theory of Maxima and Minima, Ginn and Co., 1917; Afriat, S. N., The quadratic form positive definite on a linear manifold, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47, 1—6 (1951); *Schostak, R.*, Über ein Kriterium der bedingten Definitheit einer quadratischen Form in n Variablen usw. ..., Uspechi mat. nauk, (N. S.) 9 no. 2 (60), 192—206 (1954).

I.

2. Der $(n \times n)$-Matrix $A(\alpha_{\mu\nu})$ möge die Bilinearform

$$f = f(x_\mu; y_\nu) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \tag{1}$$

entsprechen. Betrachten wir neben A für ein natürliches $k < n$ die beiden $(k \times n)$-Matrizen

$$B = (b_{\varkappa\nu}),\ C = (c_{\varkappa\nu}) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k;\ \nu = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

so entsteht aus A durch die „Ränderung" mit den Matrizen B, C die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & C' \\ B & O \end{pmatrix} \tag{3}$$

deren Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} & c_{11} \ldots c_{k1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & c_{1n} \ldots c_{kn} \\ b_{11} \ldots b_{1n} & 0 \quad \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{k1} \ldots b_{kn} & 0 \quad \ldots 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

nun betrachtet werden soll.

Wir nehmen an, daß die mit den ersten k Kolonnen der Matrizen B, C gebildeten Determinanten B_0, C_0 von Null verschieden sind. Bilden wir die B, C entsprechenden homogenen Gleichungssysteme

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\varkappa\mu} x_\mu = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \tag{5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\varkappa\nu} y_\nu = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{6}$$

so lassen sich mit ihrer Hilfe $x_1, \ldots, x_k$ durch $x_{k+1}, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_k$ durch $y_{k+1}, \ldots, y_n$ ausdrücken. So ergibt sich aus (1) eine Bilinearform in je $n - k$-Variablen:

$$F = F(x_{k+1}, \ldots, x_n;\ y_{k+1}, \ldots, y_n) = \sum_{\mu,\nu=k+1}^{n} \gamma_{\mu\nu} x_\mu y_\nu. \tag{7}$$

Bezeichnen wir die Determinante von F mit D, so soll nunmehr die Relation bewiesen werden

$$B_0 C_0 D = (-1)^k \Delta. \tag{8}$$

Im Falle daß $B = C$ gilt und A symmetrisch ist, wird (8) zur in der Einleitung erwähnten Identität von R. Schostak.

3. Wir führen neben den Variablen x_ν und y_ν die Variablen $u_\varkappa, v_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ ein und bilden die Bilinearform

$$f + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} c_{\varkappa\nu} v_\varkappa x_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\varkappa\nu} u_\varkappa y_\nu, \tag{9}$$

deren Determinante offenbar gerade Δ ist. Hier führen wir neue Variablen ein vermöge

$$\xi_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\varkappa\nu} x_\nu \quad (\varkappa = 1, \ldots, k), \quad \xi_\varkappa = x_\varkappa \, (\varkappa > k), \tag{10a}$$

$$\eta_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\varkappa\nu} y_\nu \quad (\varkappa = 1, \ldots, k), \quad \eta_\varkappa = y_\varkappa \, (\varkappa > k), \tag{10b}$$

während die Variablen $u_\varkappa$, $v_\varkappa$ unverändert bleiben. Die Determinanten von (10a) und (10b) sind dann gerade C_0 und B_0. Durch unsere Transformation geht f über in die Bilinearform

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\Gamma = (\gamma_{\mu\nu}).$$

Setzt man in φ:

$$\xi_\varkappa = \eta_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k),$$

so entsteht bis auf die Variablenbezeichnung gerade die Form f_0 mit der Determinante D.

4. Durch die Transformationen (10a), (10b) geht die Bilinearform (9) über in die Bilinearform

$$\varphi(\xi, \eta) + \sum_{\varkappa=1}^{k} u_\varkappa \eta_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa \xi_\varkappa, \tag{11}$$

deren Determinante Δ_1 in leicht verständlicher Symbolik in der Form

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Gamma & & I_k \\ & & O_{n-k,\,k} \\ I_k & O_{k,\,n-k} & O_{kk} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann. Zugleich gilt bekanntlich

$$\Delta = B_0 C_0 \Delta_1. \tag{12}$$

Entwickelt man nun die Determinante Δ_1 nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz nach den letzten k Zeilen und sodann nach den letzten

k Kolonnen, so erhält man bis auf einen Vorzeichenfaktor $(-1)^\tau$ die Determinante der Matrix, die aus Γ durch Weglassen der *ersten* k Zeilen und Kolonnen entsteht, d. h. gerade die Determinante D. Andererseits erhält man für τ sofort

$$\tau = (n+k-1) + \ldots + n + (n-1) + \ldots + (n-k) \equiv k \pmod 2.$$

Damit ist (8) bewiesen.

5. Wir betrachten nun unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen die Determinante

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I_n & C' \\ B & O \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Um sie nach der oben bewiesenen Regel darzustellen, haben wir in der Bilinearform

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

die Variablen $x_1, \ldots, x_k$; $y_1, \ldots, y_k$ vermöge (5) und (6) zu eliminieren. Geht dadurch diese Bilinearform in die Bilinearform

$$P(x_{k+1}, \ldots, x_n;\ y_{k+1}, \ldots, y_n)$$

über, deren Matrix mit P bezeichnet werden möge, so ergibt sich aus der Formel (8) die Relation

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I_k & C' \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^k B_0 C_0 \,|\, D - \lambda P \,|, \tag{14}$$

wo mit D die der Determinante D entsprechende Matrix bezeichnet wird.

6. Wir werden im folgenden unter einer *Indizesgruppe* g aus $\langle 1, n \rangle$ eine Sequenz von verschiedenen Indizes zwischen 1 und n verstehen und die Anzahl der Indizes in g als die *Ordnung von* g nennen. Die zu g in bezug auf die ganze Sequenz $1, 2, \ldots, n$ komplementäre Indizesgruppe wird allgemein mit g' bezeichnet.

Bei einer Determinante M wird allgemein durch Anhängen des Index g mit M_g derjenige Hauptminor von M bezeichnet, der aus M durch *Weglassen* der Zeilen und Kolonnen mit den in g enthaltenen Indizes entsteht. Bei den Matrizen B und C in (2) bezeichnen die Symbole B_g, C_g die Matrizen die durch *Weglassen der Kolonnen* mit Indizes aus g entstehen.

Die Relation (8) läßt sich nun in naheliegender Weise verallgemeinern. Es sei γ eine Indizesgruppe der Ordnung k, $(i_1, \ldots, i_k)$, aus $\langle 1, n \rangle$ und es mögen $B^{(\gamma)}$, $C^{(\gamma)}$ die *als von* 0 *verschiedenen vorausgesetzten* Determinanten sein, die in B bzw. in C den Kolonnen mit diesen Indizes ent-

sprechen. Man eliminiere dann mit Hilfe der Relationen (5), (6) die Variablen $x_{i_1} \ldots, x_{i_k}; y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}$ aus (1) und aus $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ und bezeichne mit $F^{(\gamma)}$, P die so entstehenden Bilinearformen in den übrigen Variablen und mit $D^{(\gamma)}$ die Determinante von $F^{(\gamma)}$. Dann gilt statt (8) und (14)

$$B^{(\gamma)} C^{(\gamma)} D^{(\gamma)} = (-1)^k \Delta, \begin{vmatrix} A - \lambda I_n & C' \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^k B^{(\gamma)} C^{(\gamma)} | D^{(\gamma)} - \lambda P |, \quad (15)$$

wo $D^{(\gamma)}$ die der Determinante $D^{(\gamma)}$ entsprechende Matrix ist. Zum Beweis braucht man nur die den Indizes i_k entsprechenden Zeilen und Kolonnen durch kogrediente Vertauschungen in die k ersten Stellen in der Determinante Δ zu bringen, wodurch der Wert dieser Determinante unbeeinflußt bleibt.

Dagegen braucht eine der Formel (8) analoge Formel nicht zu gelten, wenn die Determinanten B_0, C_0 aus *verschiedenen* Kolonnen entnommen werden. Man betrachte z. B. die Bilinearform

$$a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

und die Relationen $x_1 = 0$, $y_2 = 0$. Dadurch geht diese Bilinearform in die Bilinearform $a_{21} x_2 y_1$ mit der Determinante $D = a_{21}$ über, während die Determinante Δ hier zu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{12}$$

wird.

7. Es sei nun γ eine Indizesgruppe der Ordnung k, für die $B^{(\gamma)} C^{(\gamma)} \neq 0$ ist, und es sei $g = (j_1, j_2, \ldots, j_l)$ eine in γ' enthaltene Indizesgruppe der Ordnung l. Setzen wir in der Bilinearform f die g entsprechenden Variablen gleich Null, so entsteht eine Bilinearform f_g, für die die der Formel (15) entsprechende Formel zutrifft. Denn an die Stelle der Matrizen B, C treten hier die Matrizen B_g, C_g, die beide vom Range k sind und die von Null verschiedenen Determinanten $B^{(\gamma)}$, $C^{(\gamma)}$ enthalten. An die Stelle von Δ, $D^{(\gamma)}$ treten hier Δ_g, $D_g^{(\gamma)}$, und die Formel (15) liefert nunmehr

$$\Delta_g = (-1)^k B^{(\gamma)} C^{(\gamma)} D_g^{(\gamma)} \quad (g \prec \gamma', \; B^{(\gamma)} C^{(\gamma)} \neq 0). \quad (16)$$

Wenn andererseits für eine Gruppe g eine der beiden Matrizen B_g oder C_g einen Rang $< k$ hat, ist offenbar $\Delta_g = 0$, da dann in Δ_g entweder die k letzten Zeilen oder die k letzten Kolonnen linear abhängig sind. Daraus folgt:

Ist für eine Indizesgruppe g: $\Delta_g \neq 0$, so haben beide Matrizen B_g und C_g den Rang k.

II.

8. Wir setzen von nun an in den obigen Relationen allgemein

$$x_i = y_i \ (i = 1, \ldots, n), \quad B = C \tag{17}$$

und nehmen die Matrix $A = (a_{ik})$ als *symmetrisch* an. Unter f, f_g, F verstehen wir von nun an die entsprechenden quadratischen Formen in den x_i. Die Relation (15) und (16) werden nunmehr zu

$$B^{(\gamma)s} D^{(\gamma)} = (-1)^k \Delta; \quad \begin{vmatrix} A - \lambda I & B' \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^k B^{(\gamma)s} \, | D^{(\gamma)} - \lambda P |, \tag{18}$$

$$\Delta_g = (-1)^k B^{(\gamma)s} D_g^{(\gamma)} \qquad (g \prec \gamma', \ B^{(\gamma)} \neq 0). \tag{19}$$

Und hier ist P eine symmetrische Matrix der Ordnung $n - k$, der eine *positive* quadratische Form entspricht.

Wir wollen nunmehr die Trägheitscharaktere der quadratischen Form $F^{(\gamma)}$ diskutieren, d. h. die Anzahlen δ, π, ν der verschwindenden (δ), positiven (π) und negativen (ν) Eigenwerte von $F^{(\gamma)}$. Es ist leicht zu sehen, daß diese drei Charaktere für eine feste Matrix B von der Wahl der Indizesgruppe γ mit $B^{(\gamma)} \neq 0$ unabhängig sind. In der Tat übersieht man sofort, daß, wenn vom Ursprung abgesehen wird, π die maximale Dimension einer linearen Untermannigfaltigkeit von (5) ist, auf der f durchweg positiv bleibt, und für ν das analoge gilt. Was δ anbetrifft, so ist δ die maximale Dimension einer in (5) enthaltenen Mannigfaltigkeit L_0 mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus (5) und jedem Punkt $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ aus L_0 gilt:

$$f(x_1 + x_1^{(0)}, x_2 + x_2^{(0)}, \ldots, x_n + x_n^{(0)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Diese Charakterisierungen hängen offenbar von der Wahl der Gruppe γ nicht ab.

Wir wollen nun sehen, wie diese Charaktere aus der Matrix der Determinante Δ hergeleitet werden können.

9. Wir behandeln zuerst die Bestimmung von δ. Ist $B^{(\gamma)} \neq 0$ für die Indizesgruppe γ, so hat die Determinante $D^{(\gamma)}$ der entsprechenden quadratischen Form $F^{(\gamma)}$ den Rang $\varrho = n - k - \delta$ und enthält daher nach einem bekannten Satz einen nicht verschwindenden Hauptminor $D_{g_\delta}^{(\gamma)}$ der Ordnung ϱ, wo die Indizesgruppe g_δ der Ordnung δ in γ' enthalten ist. Dann folgt aus der Formel (19), daß $\Delta_{g_\delta} \neq 0$ ist.

Nehmen wir nun an, wir hätten für ein $\varkappa < \delta$ und eine geeignete Indizesgruppe $g_\varkappa$ der Ordnung k aus $\langle 1, n \rangle$, $\Delta_{g_\varkappa} \neq 0$. Dann ist nach dem Ende von Nr. 7 Bemerkten der Rang von B_{g_k} gleich k, so daß es eine Indizesgruppe γ der Ordnung k gibt, die in $g_\varkappa'$ enthalten und für die $B^{(\gamma)} \neq 0$ ist. Dann ist aber $g_\varkappa \prec \gamma'$, und wenn wir für die zugehörige quadratische Form $F^{(\gamma)}$ und ihre Determinante D den Hauptminor $D^{(\gamma)}_{g_\varkappa}$ bilden, unterscheidet er sich von $\Delta_{g_\varkappa}$ um einen von Null verschiedenen Faktor und ist daher $\neq 0$. Dies bedeutet aber, daß der Rang von $D^{(\gamma)}$ größer als ϱ wäre, was der Invarianz von δ widerspricht. Wir sehen:

δ ist die kleinste Zahl derart, daß für eine geeignete Indizesgruppe g_δ der Ordnung δ wir $\Delta_{g_\delta} \neq 0$ haben.

Für $\delta = 0$ ist notwendig und hinreichend, daß $\Delta \neq 0$ ist.

10. Wir erinnern daran, daß im allgemeinen Falle einer reellen quadratischen Form

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$$

der Ordnung m und vom Rang ϱ die Trägheitscharaktere durch die Aufstellung einer *Hauptreihe* von Hauptminoren bestimmt werden können. Man betrachte eine Folge von Hauptminoren von $D = |\, \alpha_{ij} \,| \; (i, j = 1, 2, \ldots, m)$:

$$D, D_{g_1}, \ldots, D_{g_{m-1}}, D_{g_m} = 1, \tag{20}$$

wo jedes g_λ eine Indizesgruppe der Ordnung λ aus $\langle 1_2 m \rangle$ ist und in $g_{\lambda+1}$ enthalten ist, und D_{g_λ} allgemein den Hauptminor von D bezeichnet, der durch das Weglassen von Zeilen und Kolonnen mit den Indizes aus g_λ entsteht, während D_{g_m} als 1 definiert wird. Eine solche Folge (20) ist nun eine Hauptreihe, wenn das erste nichtverschwindende Element in (20) ein $D_{g_{m-\varrho}}$ ist und von den darauffolgenden D_{g_λ} nie zwei unmittelbar aufeinanderfolgende zugleich verschwinden.

Es ist bekannt, daß zu einer symmetrischen Determinante stets eine Hauptreihe (20) gebildet werden kann und daß die Anzahlen π und ν bzw. gleich den Anzahlen der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel in (20) sind. Bei der Abzählung dieser Zeichenfolgen und Zeichenwechsel können dabei die Nullen in (20) einfach weggelassen werden, da die beiden an eine Null unmittelbar anstoßenden Elemente verschiedene Vorzeichen haben, wenn sie nicht verschwinden.

Ist insbesondere φ eine *positiv definite* Form, so sind alle Hauptminoren von D positiv, so daß daher jede Folge (20) eine Hauptreihe ist. Umgekehrt ist es hinreichend, damit φ positiv definit ist, daß wenigstens eine Hauptreihe zu D nur positive Elemente enthält.

Ist φ *positiv semidefinit*, so sind alle Hauptminoren von D nicht negativ und es ist $D = 0$. Damit φ positiv semidefinit sei, ist hinreichend, daß $D = 0$ und daß eine Hauptreihe zu D aus nicht negativen Elementen besteht.

Die analogen Kriterien für die negativ definiten und semidefiniten Formen erhält man, indem man alle α_{ij} mit -1 multipliziert.

11. Um nun die Trägheitscharaktere δ, π, ν der quadratischen Form f unter den Nebenbedingungen

$$\sum b_{\varkappa\mu} x_\mu = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{5⁰}$$

zu bestimmen, sei $B^{(\gamma)} \neq 0$ für eine Indizesgruppe γ der Ordnung k aus $\langle 1, n \rangle$. Dann genügt es, diese Charaktere für die quadratische Form $F^{(\gamma)}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke haben wir eine Hauptreihe der Hauptminoren von $F^{(\gamma)}$ aufzustellen, d. h. eine Folge von $n - k$ in γ' enthaltenen Indizesgruppen

$$g_1 \prec g_2 \prec \ldots \prec g_{n-k} = \gamma' \tag{21}$$

von den Ordnungen $1, 2, \ldots, n - k$, für die die Determinanten

$$D, D_{g_1}, D_{g_2}, \ldots, D_{g_{n-k-1}}, D_{n-k} = 1 \tag{22}$$

eine Hauptreihe bilden. Da es aber nur auf das Verschwinden sowie das Abwechseln der Vorzeichen bei den Elementen von (22) ankommt, können wir unter Benutzung der Relation (19) die Folge (22) ersetzen durch die Folge

$$\Delta, \Delta_{g_1}, \Delta_{g_2}, \ldots, \Delta_{g_{n-k}} \neq 0. \tag{23}$$

Die Folge (23) hat die folgenden Eigenschaften:

1. (23) beginnt mit genau δ Nullen. Für $\delta = 0$ ist bereits $\Delta \neq 0$.
2. Nach dem ersten nichtverschwindenden Element von (23) können nicht zwei nebeneinander stehende Elemente zugleich verschwinden.
3. Das letzte Element von (23) ist $\neq 0$.

Wir wollen nun zeigen, daß wenn (23) eine Folge von Hauptminoren von Δ ist mit Indizesgruppen g_λ aus $\langle 1, n \rangle$, so daß stets g_λ in $g_{\lambda+1}$ enthalten ist, und die drei oben angegebenen Eigenschaften zutreffen, dann für $\gamma = g'_{n-k}$ die entsprechende für $F^{(\gamma)}$ gebildete Folge (22) eine

Hauptreihe für $F^{(\gamma)}$ darstellt, so daß (23) zur Bestimmung von δ, π und ν benützt werden kann.

In der Tat folgt aus dem Nichtverschwinden von $\Delta_{g_{n-k}}$ nach dem Ende von Nr. 7 Gesagten, daß der Rang von B_γ gleich k ist. B_γ ist aber eine quadratische Matrix der Ordnung k, deren Determinante gerade gleich $B^{(\gamma)}$ ist. Daher gilt $B^{(\gamma)} \neq 0$, und unsere Behauptung folgt aus der Relation (19) sofort.

12. Die Herstellung einer Folge (23) mit den oben charakterisierten Eigenschaften bietet keine Schwierigkeiten, wenn man vom Satze Gebrauch macht, daß, wenn eine symmetrische Determinante der Ordnung m nicht verschwindet, entweder einer der Hauptminoren der Ordnung $m-1$ oder ein Hauptminor der Ordnung $m-2$ von 0 verschieden ist. In der Tat, sobald ein erster Hauptminor $\Delta_{g_\delta} \neq 0$ gefunden ist, braucht man sich von da an nur auf die Hauptminoren von Δ_{g_δ} zu beschränken und gelangt so zu einer Folge (23), die die Eigenschaften 1. und 2. besitzt. Wenn dann etwa $\Delta_{g_{n-k}} = 0$ ist, so ist sicher $\Delta_{g_{n-k-1}} \neq 0$, und daher nach dem Ende der Nr. 7 Bemerkten hat $B_{g_{n-k-1}}$ den Rang k und enthält eine Determinante $B^{(\gamma)} \neq 0$ der Ordnung k. Dann braucht man aber nur g_{n-k} durch γ' und $\Delta_{g_{n-k}}$ durch $\Delta_\gamma = (-1)^k B^{(\gamma)*}$ zu ersetzen, um eine Folge (23) zu erhalten, die alle verlangten Eigenschaften besitzt.

13. An Hand der obigen Resultate lassen sich nun die Bedingungen dafür, daß f auf der linearen Mannigfaltigkeit (5^0) *positiv definit* bleibt, auf verschiedene Arten formulieren:

A. Für die positive Definitheit von f auf (5^0) *ist notwendig und hinreichend, daß sich eine Folge* (23) *finden läßt, die aus lauter Hauptminoren gleichen Vorzeichens besteht.*

Übersichtlicher erscheint:

B. Notwendig und hinreichend, damit f auf (5^0) *positiv definit ist, ist daß* $(-1)^k \Delta > 0$ *und* $(-1)^k \Delta_{g_k} \geq 0$ $(1 \leq \varkappa \leq n-k)$ *gilt.*

Die analogen Bedingungen für die *positive Semidefinitheit* lauten:

A'. Für die positive Semidefinitheit von f auf (5^0) *ist notwendig und hinreichend, daß* $\Delta = 0$ *ist und sich eine Folge* (23) *finden läßt, in der*

$$(-1)^k \Delta_{g_\varkappa} \geq 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n-k-1), \quad (-1)^k \Delta_{g_{n-k}} > 0$$

ist.

B'. Notwendig und hinreichend damit f auf (5^0) *positiv semidefinit ist, ist daß* $\Delta = 0$ *und* $(-1)^k \Delta_{g_\varkappa} \geq 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, n-k)$ *gilt.*

Die Bedingungen B' schließen allerdings nicht aus, daß f auf (5) identisch verschwindet, um dies auszuschließen, muß verlangt werden, daß wenigstens ein Hauptminor $\Delta_{g_{n-\varkappa}} \neq 0$ ist.

Die Bedingungen für negative Definitheit bzw. Semidefinitheit erhält man aus den obigen Bedingungen sofort, indem man alle a_{ik} mit -1 multipliziert, d. h. statt $\Delta_{g_\varkappa}$ die Produkte $(-1)^{n-\varkappa}\Delta_{g_\varkappa}$ betrachtet.

III.

14. In dem oben zitierten Buch von *Hancock* wurden die Bedingungen für die Positivität von f auf der linearen Mannigfaltigkeit (5⁰) mit Hilfe der Determinante

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I_n & B' \\ B & O \end{vmatrix} \tag{24}$$

formuliert. Die Hancock'sche Bedingung besteht darin, daß das Polynom (24) lauter positive Wurzeln besitzt. Da zugleich bewiesen werden kann, daß das Polynom (24) im Falle einer symmetrischen Matrix A nur reelle Wurzeln haben kann, hat *Hancock* diese Bedingung zugleich in der Form angegeben, daß das Polynom (24), nach Potenzen von λ entwickelt, lauter Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten aufweist. Man kann diese Resultate leicht beweisen und zugleich zu einer Bestimmungsregel für sämtliche Trägheitsindizes von f auf der linearen Mannigfaltigkeit (5⁰) ausbauen, wenn man von der zweiten Formel (18) ausgeht. Es ist nämlich einerseits seit Sylvester bekannt, daß wenn D eine symmetrische Matrix und P eine symmetrische positive Matrix gleicher Ordnung ist, dann alle Wurzeln von

$$|D - \lambda P| = 0 \tag{25}$$

reell sind. Andererseits haben wir kürzlich bewiesen[2], daß die Anzahlen der positiven, negativen und verschwindenden Eigenwerte von D, d. h. π, ν und δ bzw. gleich sind den Anzahlen der positiven, negativen und verschwindenden Wurzeln von (25) sind. Daraus folgt ferner insbesondere, daß die Anzahlen π und ν bzw. gleich den Anzahlen der Zeichenwechsel und der Zeichenfolgen in der Entwicklung von (25) nach Potenzen von λ sind.

---

[2] *A. Ostrowski*, Über Eigenwerte von Produkten Hermitescher Matrizen. Hamburger Math. Abh., Bd. 23, pp. 60—68 (1959).

IV.

15. Wir wenden nun die obigen Resultate auf das Problem der hinreichenden Bedingungen für Extrema bei Benützung Lagrangescher Multiplikatoren.

Handelt es sich um die Bestimmung der Extrema einer Funktion $z = f(\xi) = f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen

$$\varphi_\varkappa(\xi) \equiv \varphi_\varkappa(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, k;\ k < n), \tag{26}$$

so muß bekanntlich der kritische Punkt $\bar{\xi} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ zusammen mit den entsprechenden Werten der Multiplikatoren $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_k$, neben den Bedingungen (26) den n Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{27}$$

wo

$$V = f + \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa \varphi_\varkappa \tag{28}$$

ist, genügen. Wir nehmen im folgenden an, daß in $\bar{\xi}$ die Funktion f und alle $\varphi_\varkappa$ zweimal stetig differenzierbar sind und daß dort der Rang der $(k \times n)$-Matrix

$$B = \left(\frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_i}\right) \tag{29}$$

genau gleich k ist. Lassen sich dann vermöge der Gleichungen (26) in der Umgebung von $\bar{\xi}$ etwa $x_1, \ldots, x_k$ durch $x_{k+1}, \ldots, x_n$ darstellen und trägt man diese Darstellungen in $f(\xi)$ ein, so ergibt sich

$$z = Z(x_{k+1}, \ldots, x_n),\ x_\varkappa = X_\varkappa(x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k), \tag{30}$$

und man hat nur die Bedingungen für das unbedingte Extremum von Z im Punkte $(\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n)$ aufzustellen. Von hier aus erhält man bekanntlich die Bedingungen (26) und (27) als notwendige Bedingungen, während die hinreichende Bedingung bekanntlich dahin lautet, daß die quadratische Form

$$d^2 Z = \sum_{i,j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{31}$$

im Punkte $\bar{\xi}$ für beliebige Werte der Unbestimmten dx_i positiv definit ist. Ferner ist, damit in $\bar{\xi}$ kein Extremum vorliegt, hinreichend, daß die quadratische Form (31) *indefinit* ist.

Wir wollen nun beweisen, daß für diese quadratische Form die Relation gilt

$$d^2 Z = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \tag{32}$$

wo $dx_1, \ldots, dx_k$ vermöge der linearen Relationen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_i} dx_i = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)^3 \tag{33}$$

mit der Matrix B zu eliminieren sind.

In der Tat gilt ja offenbar unter Berücksichtigung von (31), wenn $x_{k+1}, \ldots, x_n$ als primäre Variablen mit konstanten Differentialen aufgefaßt werden,

$$d^2 Z = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} d^2 X_\lambda. \tag{34}$$

Beachtet man, daß wenn wir in den φ_k die Variablen $x_1, \ldots, x_k$ durch $X_1, \ldots, X_k$ ersetzt denken, dann jedesmal identisch Null herauskommt, so folgt, daß man unter Berücksichtigung von (31) und (26) auch

$$d^2 \varphi_\varkappa = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_\varkappa}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_\lambda} d^2 X_\lambda = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{35}$$

hat. Multiplizieren wir (35) mit $\bar{\lambda}_\varkappa$ und addieren wir alle so entstehenden Gleichungen gliedweise zu (34), so erhalten wir links d^2Z, während rechts, wegen der Relationen (27), sich gerade der Ausdruck rechts in (32) ergibt, womit (32) bewiesen ist. Und offenbar ist für die Gültigkeit von (32) unwesentlich, welche der Determinanten k-ter Ordnung aus B gerade von Null verschieden ist.

16. Wir haben also jetzt festzustellen, wann die quadratische Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \tag{36}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_i} h_i = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{37}$$

definit bzw. indefinit ist. Dies ist aber gerade das Problem, das im obigen

---

[3] Vgl. *J. Hadamard*, Leçons sur le calcul des variations, Paris 1910, p. 20; sowie *Schostak*, a. a. O., p. 205.

behandelt und gelöst wurde. Seine Lösung hängt, wie wir gesehen haben, von der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} & \dfrac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \bar{x}_i} \\ \dfrac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \bar{x}_j} & 0 \end{vmatrix} \tag{38}$$

ab[4]. Wir erhalten daher, wenn wir nur von den obigen Kriterien B, B' Gebrauch machen:

Damit in $\bar{\xi}$ ein Minimum vorliegt, ist hinreichend, daß $\Delta \neq 0$ ist und daß für alle Indizesgruppen $g_\varkappa$ aus $1, \ldots, n$ mit $\varkappa \leq n - k$ man

$$(-1)^k \Delta_{g_\varkappa} \geq 0 \tag{39}$$

hat.

Damit in $\bar{\xi}$ ein Maximum vorliegt, ist hinreichend, daß $\Delta \neq 0$ ist und daß für alle Indizesgruppen $g_\varkappa$ aus $1, \ldots, n$ mit $\varkappa \leq n - k$ man

$$(-1)^{n+k-\varkappa} \Delta_{g_\varkappa} \geq 0 \tag{40}$$

hat.

Damit in $\bar{\xi}$ weder ein Maximum noch ein Minimum vorliegt, ist hinreichend, daß weder durchweg (39) *noch durchweg* (40) *gilt für $\varkappa < n - k$.*

Es sei zum Schluß noch bemerkt, daß die Anwendung der obigen Resultate auf das Problem des bedingten Extremums bereits in den in der Einleitung zitierten Arbeiten besprochen wird, unter Beschränkung auf die hinreichenden Bedingungen für die Existenz des Extremums.

[4] Sie tritt bereits bei *Hadamard* an der zitierten Stelle auf, wo allerdings nur die Bedingung $\Delta \neq 0$ diskutiert wird.

Graphs with Given Infinite Group

By

Gert Sabidussi, New Orleans, La., USA.

(Received April 11, 1959)

1. Introduction

There exist a considerable number of theorems asserting for a given finite group G the existence of a graph X whose automorphism group $G(X)$ is isomorphic to G ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]). We propose to show that *every* group (finite or infinite) is isomorphic to the automorphism group of some graph.

THEOREM: *Let G be any group, and let $\mathfrak{a}$ be a cardinal. Then there exists a connected graph X such that* (i) $G(X) \cong G$, *and* (ii) X *has at least $\mathfrak{a}$ vertices.*

All known constructions of graphs with a given group G are variations of the process used in [1] which is based on the colorgroup of G with respect to some set of generators of G. In order to apply the same procedure to groups of arbitrarily high cardinal it is necessary to have a sufficiently large supply of connected graphs with trivial automorphism group. The existence of these graphs is established in the following.

LEMMA: *Given any ordinal α there exists a graph X_α such that* (i) X_α *is connected*; (ii) $G(X_\alpha) = 1$; (iii) X_α *has at least $\aleph_\alpha$ vertices*; (iv) *if α and β are distinct ordinals, then X_α and X_β are non-isomorphic.*

By a *graph* X is meant a set $V(X)$ (the *vertices* of X) together with a set $E(X)$ (the *edges* of X) of unordered pairs of *distinct* elements of $V(X)$. Unordered pairs will be indicated by brackets. Given two graphs X, Y a function $\varphi: V(X) \to V(Y)$ is an *isomorphism* of X onto Y if φ is one-one, onto, and $[x, y] \in E(X)$ is equivalent to $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$. An *automorphism* of X is an isomorphism of X onto itself. $G(X)$ is the group of all automorphisms of X.

Written with the support of the National Science Foundation of the United States of America.

Let $\{X_a \mid a \in A\}$ be a set of (not necessarily disjoint) graphs. By the *sum* $\sum_{a \in A} X_a$ we mean the graph X given by $V(X) = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times V(X_a))$, $E(X) = \{[(a, x), (a, y)] \mid a \in A, [x, y] \in E(X_a)\}$.

2. Proof of Lemma

Let X_0 be any countable connected graph with $G(X_0) = 1$. To obtain X_α, $\alpha > 0$, we proceed as follows. Let $\mathfrak{a}_0 = \aleph_0$, $\mathfrak{a}_\alpha = 2^{\mathfrak{a}_{\alpha-1}}$ if α is not a limit ordinal, $\mathfrak{a}_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \mathfrak{a}_\xi$ if α is a limit ordinal. For each α let M_α be a fixed set of cardinal $\mathfrak{a}_\alpha$ such that M_0 is the set of positive integers, $M_\alpha = 2^{M_{\alpha-1}}$ if α is not a limit ordinal, and $M_\alpha = \bigcup\{M_\xi \mid \xi < \alpha\}$ if α is a limit ordinal. By making the proper identifications we can assume that $M_\xi \subset M_\eta$ whenever $\xi < \eta$.

For given $m_0 \in M_0$ we now define a graph X_{m_0} as follows:

$$V(X_{m_0}) = \{1, \ldots, m_0 + 5, t_{m_0}\},\ t_{m_0} \notin M_0,$$

$$E(X_{m_0}) = \{[i, i+1] \mid 1 \leqq i \leqq m_0 + 4\} \cup \{[m_0 + 3, t_{m_0}]\}.$$

Then clearly X_{m_0} is connected, $G(X_{m_0}) = 1$, and no two distinct X_{m_0}'s are isomorphic.

Suppose that for each $\xi < \alpha$ and each $m_\xi \in M_\xi$ we have already defined a graph X_{m_ξ} with the following properties. (1) X_{m_ξ} is connected; (2) $G(X_{m_\xi}) = 1$; (3) X_{m_ξ} has $\mathfrak{a}_\xi$ or $\mathfrak{a}_{\xi-1}$ vertices according as ξ is, or is not, a limit ordinal; (4) no two distinct X_{m_ξ}'s are isomorphic. Given $m_\alpha \in M_\alpha$ we define X_{m_α} as follows. Let N_α be a set of cardinal $\mathfrak{a}_\alpha$ such that $M_\alpha \cap N_\alpha$ is empty, and let f_α be a one-one function of M_α onto N_α.

Case (1): α is not a limit ordinal. Then

$$V(X_{m_\alpha}) = \{t_{m_\alpha}\} \cup \bigcup\{W_{m_{\alpha-1}} \mid m_{\alpha-1} \in M_{\alpha-1}\},$$

where

$$W_{m_{\alpha-1}} = \begin{cases} (\{m_{\alpha-1}\} \times V(X_{m_{\alpha-1}})) \cup \{(f_{\alpha-1}\, m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}})\} & \text{if } m_{\alpha-1} \in m_\alpha \\ \{(m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}})\} \cup (\{f_{\alpha-1}\, m_{\alpha-1}\} \times V(X_{m_{\alpha-1}})) & \text{if } m_{\alpha-1} \notin m_\alpha, \end{cases}$$

and $t_{m_\alpha} \notin W_{m_\xi}$ for all $\xi < \alpha$;

$$E(X_{m_\alpha}) = A \cup B \cup \bigcup\{C_{m_{\alpha-1}} \cup \{[t_{m_\alpha}, (m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}})]\} \mid m_{\alpha-1} \in M_{\alpha-1}\},$$

where

$$A = \{[(m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}}), (m'_{\alpha-1}, t_{m'_{\alpha-1}})], [(f_{\alpha-1} m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}}), (f_{\alpha-1} m'_{\alpha-1}, t_{m'_{\alpha-1}})] \mid$$
$$m_{\alpha-1}, m'_{\alpha-1} \in M_{\alpha-1}, m_{\alpha-1} \neq m'_{\alpha-1}\},$$

$$B = \{[(m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}}), (f_{\alpha-1} m_{\alpha-1}, t_{m_{\alpha-1}})] \mid m_{\alpha-1} \in M_{\alpha-1}\},$$

and

$$C_{m_{\alpha-1}} = \begin{cases} \{[(m_{\alpha-1}, x), (m_{\alpha-1}, y)] \mid [x, y] \in E(X_{m_{\alpha-1}})\} \text{ if } m_{\alpha-1} \in m_\alpha, \\ \{[(f_{\alpha-1} m_{\alpha-1}, x), (f_{\alpha-1} m_{\alpha-1}, y)] \mid [x, y] \in E(X_{m_{\alpha-1}})\} \text{ if } m_{\alpha-1} \notin m_\alpha. \end{cases}$$

Case (2): α is a limit ordinal. Then for $m_\alpha \in M_\alpha = \bigcup\{M_\xi \mid \xi < \alpha\}$ let $\eta = \eta(m_\alpha)$ be the smallest $\xi < \alpha$ such that $m_\alpha \in M_\xi$, and define X_{m_α} by

$$V(X_{m_\alpha}) = \{t_{m_\alpha}\} \cup V(\Sigma\{X_{m_\xi} \mid \eta \leqq \xi < \alpha\}),$$

where $t_{m_\alpha} \notin V(\Sigma X_{m_\xi})$ for all $\xi < \alpha$, and m_ξ is m_α *regarded as an element of* M_ξ, $\eta \leqq \xi < \alpha$;

$$E(X_{m_\alpha}) = \{[(t_{m_\alpha}, (\xi, t_{m_\xi}))] \mid \eta \leqq \xi < \alpha\} \cup E(\Sigma\{X_{m_\xi} \mid \eta \leqq \xi < \alpha\}).$$

It can be easily checked that X_{m_α}, $m_\alpha \in M_\alpha$, has properties (1) ... (4).

We can now define X_α. If α is a limit ordinal we can take $X_\alpha = X_{m_\alpha}$ for some $m_\alpha \in M_\alpha$. In this case put $x_\alpha = t_{m_\alpha}$. If α is not a limit ordinal put

$$V(X_\alpha) = \{x_\alpha\} \cup V(\Sigma\{X_{m_\alpha} \mid m_\alpha \in M_\alpha\}),$$

where $x_\alpha \notin V(\Sigma X_{m_\alpha})$,

and

$$E(X_\alpha) = \{[x_\alpha, (m_\alpha, t_{m_\alpha})] \mid m_\alpha \in M_\alpha\} \cup E(\Sigma\{X_{m_\alpha} \mid m_\alpha \in M_\alpha\}).$$

This completes the proof of the lemma.

3. Proof of Theorem

Let $\mathfrak{a}$ be a cardinal, G a group, and H a set of generators of G. Index H by a set A of ordinals such that the cardinal of A equals the cardinal of H. Thus $H = \{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Let X_α, $\alpha \in A$, be as in the lemma. Clearly A can be so chosen that for at least one $\alpha_0 \in A$, X_{α_0} has more than $\mathfrak{a}$ vertices. For each pair $(\alpha, g) \in A \times G$ let $X_\alpha(g)$ be an isomorphic copy of X_α such that $(\alpha, g) \neq (\alpha', g')$ implies that $X_\alpha(g)$ and $X_{\alpha'}(g')$ are disjoint, and let $x_\alpha(g)$ be the image of x_α under the isomorphism $X_\alpha \to X_\alpha(g)$.

Form a graph X as follows:

$$V(X) = G \cup A \times G \cup V(\Sigma\{X_\alpha(g) \mid \alpha \in A, g \in G\}),$$

$$E(X) = \{[g, (\alpha, g)], [(\alpha, g), x_\alpha(g)], [x_\alpha(g), gh_\alpha] \mid \alpha \in A, g \in G\} \cup E(\Sigma\{X_\alpha(g) \mid \alpha \in A, g \in G\}).$$

Then clearly X is connected, has at least $\mathfrak{a}$ vertices, and $G(X) \cong G$.

Tulane University.

References

[1] *R. Frucht*, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe, Compositio Math. **6**, 239—250 (1938).

[2] *R. Frucht*, Graphs of degree 3 with given abstract group, Canad. J. Math. **1**, 365—378 (1949).

[3] *H. Izbicki*, Reguläre Graphen 3., 4. u. 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen, Monatsh. f. Math. **61**, 42—49 (1957).

[4] *H. Izbicki*, Unendliche Graphen mit vorgegebenen Eigenschaften, Monatsh. f. Math. **63**, 298—301 (1959).

[5] *H. Izbicki*, Reguläre Graphen beliebigen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften, Monatsh. f. Math. **64**, 15—21 (1960).

[6] *G. Sabidussi*, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, Canad. J. Math. **9**, 515—525 (1957).

[7] *G. Sabidussi*, On the minimum order of graphs with given automorphism group. Monatsh. f. Math. **63**, 124—127 (1959).

A Test of Fit for the Spectral Density Function of a Stochastic Process

By

S. K. Zaremba, University College of Swansea, Wales

(Received April 13, 1959)

1. Introduction

Tests of fit for the spectrum, or the reduced spectrum, of a stochastic process may be wanted in various circumstances. Although, from a practical view point, the most important case seems to arise when we have to test whether a process represents white noise in general, or, possibly, white noise at a given level, it is clearly desirable to evolve a procedure applying to processes which are only assumed to satisfy some conditions of regularity, and are otherwise arbitrary.

A test of fit for spectra of linear processes can be derived from well-known results by Grenander and Rosenblatt [2, 3]. However, in the present stage of our knowledge of distributions of extreme values in continuous-parameter processes, such a test can be actually applied only when the auxiliary process brought in by these two authors has orthogonal increments, i. e. when the variables generating the given process have zero kurtosis. Moreover, while the underlying assumptions ensure the existence of an absolutely continuous spectral density function, the test in question, nevertheless, concerns only the spectral *distribution* function, and yields no means of assessing the fit of the spectral *density* function. An alternative test, also limited to the spectral distribution function, was recently devised by Walker [6]; in comparison with the former test it has the advantage of applying to a wider class of Gaussian processes, but, given any simple alternative hypothesis, the power of this test does not tend to 1 when the sample size tends to infinity.

The object of the present note is to show how, owing to results obtained in a joint paper by Z. A. Lomnicki and the present author [5],

the fit of a given spectral, or reduced spectral, density function can be tested by means of an estimator of the mean, over the frequencies, of the squared difference between the true and the hypothetical functions; this estimator contains no arbitrary parameter, and its asymptotic distribution is independent of the kurtosis of the variables generating the given process.

The assumptions and notations will correspond to those of the last-quoted paper. Thus it will be assumed that the variable x_t of the process is given by

$$x_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{t-k}\,\varepsilon_k \qquad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

with $h_i = 0$ whenever $i < 0$, $\Sigma\,|\,h_i\,|$ being convergent, and $\{\varepsilon_t\}$ being random variables. The process will be said to satisfy the conditions H_{2m} $(m \geqq 1)$ if there exists a numerical sequence $\mu_1 = 0,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{2m}$ such that

$$E(\varepsilon_{t(1)}^{\nu(1)},\ \ldots,\ \varepsilon_{t(s)}^{\nu(s)}) = \mu_{\nu(1)} \cdot \ldots \cdot \mu_{\nu(s)}$$

whenever $\nu(1),\ \ldots,\ \nu(s) > 0$ and $\nu(1) + \ldots + \nu(s) \leqq 2\,m$, the indices $t(1), \ldots, t(s)$ being pairwise distinct, but otherwise arbitrary; if, moreover, the process $\{\varepsilon_t\}$ is strictly stationary and its variables are independent, the process $\{x_t\}$ will be said to satisfy the conditions H_{2m}^*. The covariance function of the process will be denoted by $\{R_k\}$ and its autocorrelation function by $\{\varrho_k\}$, the spectral, and reduced spectral, density functions being respectively

$$F'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k\, e^{2\pi i k\omega} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k \cos(2\,\pi\,k\,\omega)$$

and

$$f'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k\, e^{2\pi i k\omega} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k \cos(2\,\pi\,k\,\omega).$$

Furthermore, we shall use the following notations:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &= \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega)]^n\, d\omega = \Sigma\, R_{k(1)} \cdot \ldots \cdot R_{k(n)}\ , \\ \mathfrak{f}_n &= \int_{-1/2}^{1/2} [f'(\omega)]^n\, d\omega = \Sigma\, \varrho_{k(1)} \cdot \ldots \cdot \varrho_{k(n)}\ , \end{aligned}\right\}$$

where the two sums are extended to all the sets of integral values of $k(1), \ldots, k(n)$ for which $k(1) + \ldots + k(n) = 0$ (For alternative ways of writing these sums cf. [5], Section 18). The sample covariances are denoted by

$$C_{k,N} = \frac{1}{N - |k|} \sum_{t=1}^{N-|k|} x_t \, x_{t+|k|}.$$

Denoting by $B = \{B_k\}$ any absolutely convergent sequence satisfying the identity $B_{-k} = B_k$, we make

$$\left.\begin{aligned} \Psi_N(B) &= \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \, B_k \, (C_{k,N} - R_k), \\ \Delta_N &= \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \, (C_{k,N} - R_k)^2, \\ S_N &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \, C_{k,N}^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

The symbols representing the last three expressions are slightly simplified in comparison with those previously adopted (cf. [5]), the second index, now unnecessary, being omitted in each case.

2. A test of fit for the spectral density function

Let

$$G'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \, e^{2\pi i k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k \omega)$$

with $A_{-k} = A_k$ and $\Sigma \, | A_k |$ convergent, $F'(\omega)$ being the (unknown) true spectral density function of the process $\{x_t\}$. The hypothesis that $F'(\omega) = G'(\omega)$ can clearly be tested by means of an estimator of a suitable norm of the difference of these two functions. The expression

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [F'(\omega) - G'(\omega)]^2 \, d\omega = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (R_k - A_k)^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_k^2 - 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \, R_k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

is such an obvious norm in the space of trigonometric series, to which both functions belong. In this connection, it may be pointed out once more that testing the fit of the spectral density function is equivalent to testing the fit of the covariance function *treated as a whole*.

As shown elsewhere [5], the statistic S_N defined by (1) is a satisfactory estimator of $\mathfrak{S}_2 = \Sigma \, R_k^2$, while $\Sigma \, A_k^2$ is a given constant, and, clearly,

$$\sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \, A_k \, C_{k,N}$$

can be regarded as an estimator of $\Sigma A_k R_k$. Thus we can take the expression

$$Z_N(A) = S_N - 2 \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N}) A_k C_{k,N} + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 A_k^2 \qquad (3)$$

as an estimator of (2). Under the very mild additional assumption that $\Sigma |k| R_k^2$ converges, the bias of S_N as an estimator of $\mathfrak{S}_2$ is $O(N^{-1})$ (cf. [5], Section 20), and it is easy to see that if we also assume the convergence of $\Sigma |k| A_k^2$, the contributions of the two remaining terms of (3) to the bias of $Z_N(A)$ are similarly $O(N^{-1})$. Hence the bias of $Z_N(A)$ is asymptotically negligible in comparison with its standard deviation, which can be expected to be of the order of $N^{-1/2}$. Indeed, we have the following:

Proposition 1. Under the assumptions H_8^*, the expression

$$N^{1/2} \{Z_N(A) - E[Z_N(A)]\} \qquad (4)$$

is asymptotically normal with a variance tending to

$$\frac{4}{3} \mathfrak{S}_4 + 8 \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega)]^2 [G'(\omega) - F'(\omega)]^2 \, d\omega + \\ + 4 \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \{ \int_{-1/2}^{1/2} F'(\omega) [G'(\omega) - F'(\omega)] \, d\omega \}^2 \qquad (5)$$

when $N \to \infty$; under the assumptions H_{4n}, the moments of (4) up to the order n tend to values corresponding to the aforesaid distribution.

Proof. In view of

$$S_N - E(S_N) = \tfrac{1}{2} [\Delta_N - E(\Delta_N)] + \Psi_N(R) \qquad (6)$$

(cf. [5], Equation (20.9)], of (1) and of (3),

$$N^{1/2} \{Z_N(A) - E[Z_N(A)]\} = \tfrac{1}{2} N^{1/2} [\Delta_N - E(\Delta_N)] + N^{1/2} \Psi_N(R - 2A).$$

But (cf. [5], Proposition 21.1), under H_8^*, the two terms in the right-hand side of the last equation are jointly asymptotically normally distributed with

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{var} [\tfrac{1}{2} N^{1/2} \Delta_N] = \frac{10}{3} \mathfrak{S}_4 + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \mathfrak{S}_2^2;$$

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{var} [N^{1/2} \Psi_N(R - 2A)] =$$

$$= 2 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} (R_p - 2A_p) R_{p+s} (R_q - 2A_q) R_{q+s} + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} [\sum_{s=-\infty}^{+\infty} (R_s - 2A_s) R_s]^2;$$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{cov}\{\tfrac{1}{2} N^{1/2} [\Delta_N - E(\Delta_N)], N^{1/2} \Psi_N(R - 2A)\} =$$

$$= 2 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} (R_p - 2A_p) R_{p+s} R_q R_{q+s} + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \mathfrak{S}_2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (R_s - 2A_s) R_s.$$

Hence, under H_3^*, the asymptotic distribution of (4) is indeed normal. The limiting variance can be obtained directly from the three formulae above; after easy transformations, we find

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} Z_N(A) = \frac{4}{3} \mathfrak{S}_4 + 8 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} (R_p - A_p) R_{p+s} (R_q - A_q) R_{q+s} +$$

$$+ 4 \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \Big[\sum_{s=-\infty}^{+\infty} (R_s - A_s) R_s\Big]^2.$$

But here, owing to $R_{-k} = R_k$ and $A_{-k} = A_k$, the second term of the right-hand side is easily seen to be identical with

$$8 \sum_{\substack{k,l,u,v=-\infty \\ [k+l+u+v=0]}}^{+\infty} (R_k - A_k) R_l (R_u - A_u) R_v,$$

and, therefore (cf. [5], Lemma 18.2), equal to

$$8 \int_{-1/2}^{1/2} [F'(\omega)]^2 [F'(\omega) - G'(\omega)]^2 \, d\omega,$$

while, for similar reasons, the coefficient of $4 \varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ is nothing else but

$$\Big\{\int_{-1/2}^{1/2} F'(\omega) [F'(\omega) - G'(\omega)] \, d\omega\Big\}^2.$$

Hence the first part of the proposition is proved; the second part also follows from the results quoted above.

Remark. If $G'(\omega) = F'(\omega)$ for every ω, the asymptotic variance of (4) reduces to $\frac{4}{3} \mathfrak{S}_4$. It is noteworthy that in this case, which corresponds to the null hypothesis of the test to be proposed, the asymptotic distribution of $Z_N(A)$ is independent of the kurtosis of the random variables generating the process in question.

It would be possible to devise estimators of (2) involving fewer than N sample covariances, although doubts might then arise over the biases. However, it is easy to see (cf. [5]) that in this case the asymptotic variance would depend on $\varkappa_4 \varkappa_2^{-2}$ even under the null hypothesis, since the coefficient of this quantity would change only in the asymptotic variance of the first term in the right-hand side of (3), and, in

consequence, would no longer cancel out with the terms arising out of the variance of the second term and of the covariance of the first two; on the other hand, in the era of electronic computers, long numerical computations should not be shunned where they are justified by the nature of the problem.

If it is required to test the hypothesis $\mathfrak{H}_0$ that the true spectral density function of a process $\{x_t\}$ is $G'(\omega) = \Sigma A_k e^{2\pi i k\omega}$, it is natural to form the statistic $Z_N(A)$. Following the usual practice, this statistic will be treated as if its actual distribution coincided with the normal asymptotic distribution. Assume, at first, that the null hypothesis is tested against the simple alternative hypothesis $\mathfrak{H}$ that the spectral density function is some other specified function, the process always satisfying H_8^*. In both cases $Z_N(A)$ is asymptotically normal, but its expectation is 0 under $\mathfrak{H}_0$, and some positive number, say d, under $\mathfrak{H}$. Also the variances are, in general, different under the two hypotheses; let them be σ_0^2 under $\mathfrak{H}_0$ and σ^2 under $\mathfrak{H}$.

The ratio of the probability density of $Z_N(A)$ under $\mathfrak{H}$ to that under $\mathfrak{H}_0$ is, clearly,

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\left\{\frac{Z}{\sigma_0^2} - \frac{(Z-d)^2}{\sigma^2}\right\} = \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\{(\sigma_0^{-2}-\sigma^{-2})Z^2 + 2d\sigma^{-2}Z - d^2\sigma^{-2}\}, \quad (7)$$

where, for the sake of simplicity, Z stands for $Z_N(A)$. The argument of the exponential is seen to be a quadratic polynomial in Z; its behaviour depends on the relationship between σ and σ_0, about which nothing can be said a priori.

If $\sigma = \sigma_0$, the polynomial becomes linear, and, obviously, the best critical region extends from some positive point to $+\infty$, so that the most powerful test is simply a one-sided test, and it is easy to see that its power tends to 1 when $N \to \infty$.

Otherwise, the ratio of the probability densities admits

$$d\,\sigma_0^2(\sigma_0^2 - \sigma^2)^{-1} = X,$$

say, as an extremum, and is symmetrical about this point. If $\sigma > \sigma_0$, the point is a minimum, and the best critical region is obviously the complement of an interval centred at X and including, for any sensible significance level, the point $Z = 0$. It should be noted that, in this case, $X < 0$. Thus one of the two components of the best critical region is contained in the interval $(-\infty, 2X)$. In other terms, it corresponds to a tail of the distribution of Z under either hypothesis; the distance

of the mean of the distribution from the beginning of this tail exceeds $d + 2 \mid X \mid$ under $\mathfrak{H}$ and $2 \mid X \mid$ under $\mathfrak{H}_0$, while the standard deviation is $O(N^{-\frac{1}{2}})$ in both cases. Thus, for any fixed significance level, the probability of the region in question tends to 0 under either hypothesis; moreover, under $\mathfrak{H}$, it tends to 0 more quickly than the probability of the region of acceptance of $\mathfrak{H}_0$. Consequently, for any fixed simple alternative hypothesis $\mathfrak{H}$, the asymptotic power of the test is unimpaired if the test is made one-sided.

If, on the contrary, $\sigma < \sigma_0$, we have $X > d > 0$, and (7) attains its maximum for $Z = X$. Thus the best critical region is an interval centred at X. When $N \to \infty$, the significance level remaining constant, this interval is easily seen to tend to the interval $(0, 2X)$, and since both σ_0 and σ are $O(N^{-\frac{1}{2}})$, the effect of extending this interval to $+\infty$, and of adjusting its other end to the chosen significance level will clearly be negligible in the limit.

Thus, in all cases, given any simple alternative hypothesis $\mathfrak{H}$, a one-sided test is asymptotically as powerful as the most powerful test based on $Z_N(A)$. Such a test being independent of the precise nature of $\mathfrak{H}$, it can be successfully applied to composite alternative hypotheses.

3. A test of fit for the reduced spectral density function

Tests of fit for the *reduced* spectral density function can be obtained in the same manner as those discussed in the preceding section. Indeed, if

$$g'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{2\pi i k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \cos(2\pi k \omega),$$

the hypothesis that $f'(\omega) = g'(\omega)$ can be tested by means of an estimator of the obvious norm

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f'(\omega) - g'(\omega)]^2 \, d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\varrho_k - \alpha_k)^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k^2 - 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k \alpha_k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^2 \qquad (8)$$

of the difference $f'(\omega) - g'(\omega)$. As shown elsewhere [5, Section 22], $C_{0,N}^{-2} S_N$ is a satisfactory estimator of $\Sigma \varrho_k^2 = \int_2$. On the other hand, $\Sigma \alpha_k^2$ is a given constant, and

$$C_{0,N}^{-1} \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \alpha_k C_{k,N}$$

is an asymptotically unbiased estimator of $\Sigma \varrho_k \alpha_k$; if both $\Sigma \mid k \mid R_k^2$

and $\Sigma \mid k \mid \alpha_k^2$ converge, the bias of this estimator is easily found to be $O(N^{-1})$. Thus it is natural to accept

$$z_N(\alpha) = C_{0,N}^{-2} S_N - 2 C_{0,N}^{-1} \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{\mid k \mid}{N})^2 \alpha_k C_{k,N} + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{\mid k \mid}{N})^2 \alpha_k^2 \qquad (9)$$

as an estimator of (8); the Hölder coefficient $(1 - N^{-1} \mid k \mid)^2$ is introduced in the last sum for the sake of uniformity, and the consequent bias is obviously $O(N^{-1})$ under the additional assumptions mentioned above.

Let

$$\xi_N(\alpha) = \frac{E(S_N)}{R_0^2} - 2 \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{\mid k \mid}{N})^2 \alpha_k \varrho_k + \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{\mid k \mid}{N})^2 \alpha_k^2;$$

this expression will be shown to be, asymptotically, the centre of the distribution of $Z_N(\alpha)$, which will be proved to be asymptotically normal. More precisely, we have the following:

Proposition 2. Under the assumptions H_8^*, the distribution of

$$N^{1/2} \{z_N(\alpha) - \xi_N(\alpha)\} \qquad (10)$$

tends to a normal distribution with a zero mean and a variance equal to

$$\frac{4}{3} \int_4 + 8 \int_{2,2} - 16 \int_{1,1} \int_{2,1} + 8 \int_2 \int_{1,1}^2, \qquad (11)$$

where

$$\int_{m,n} = \int_{-1/2}^{1/2} [f'(\omega)]^m [f'(\omega) - g'(\omega)^n] \, d\omega \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Moreover, under the asumptions H_{12n}^*, the moments of (10) of every order *lower* than $2n$ exist and tend to those of the aforesaid distribution.

Proof: *Clearly*,

$$z_N(\alpha) - \xi_N(\alpha) = \frac{S_N}{C_{0,N}^2} - \frac{E(S_N)}{R_0^2} - \frac{2}{C_{0,N}} \Psi_N(\alpha) +$$

$$+ 2 (\frac{1}{R_0} - \frac{1}{C_{0,N}}) \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{\mid k \mid}{N})^2 \alpha_k R_k = C_{0,N}^{-2} \{S_N - R_0^{-2} E(S_N) C_{0,N}^2 -$$

$$- 2 C_{0,N} \Psi_N(\alpha) + 2 (R_0^{-1} C_{0,N}^2 - C_{0,N}) \sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{\mid k \mid}{N})^2 \alpha_k R_k\},$$

or

$$N^{1/2}[z_N(\alpha)-\xi_N(\alpha)] = N^{1/2} C_{0,N}^{-2}\{S_N - E(S_N) - 2R_0^{-1}E(S_N)(C_{0,N}-R_0) - R_0^{-2}E(S_N)(C_{0,N}-R_0)^2 - 2(C_{0,N}-R_0)\Psi_N(\alpha) - 2R_0\Psi_N(\alpha) + 2R_0^{-1}(C_{0,N}-R_0)^2 \sum_{k=1-N}^{N-1}(1-\frac{|k|}{N})^2\alpha_k R_k + 2(C_{0,N}-R_0)\sum_{k=1-N}^{N-1}(1-\frac{|k|}{N})^2\alpha_k R_k\}. \quad (12)$$

Since

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} C_{0,N}^{-2} = R_0^{-2},$$

according to a much-quoted proposition given by Cramér [1, § 20.6], the limiting distribution of (10) will not be affected if, in (12), the factor $C_{0,N}^{-2}$ is replaced by R_0^{-2}. Furthermore, in view of the known asymptotic distributions of $C_{0,N}$ and $\Psi_N(\alpha)$,

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} N^{1/2} R_0^{-2} E(S_N)(C_{0,N}-R_0)^2 = 0; \quad \operatorname*{plim}_{N\to\infty} N^{1/2}(C_{0,N}-R_0)\Psi_N(\alpha) = 0;$$

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} N^{1/2} R_0^{-1}(C_{0,N}-R_0)^2 \sum_{k=1-N}^{N-1}(1-\frac{|k|}{N})^2\alpha_k R_k = 0,$$

and, consequently, according to the same theorem, the limiting distribution in question will still remain the same if the corresponding terms are removed in (12). Thus we are left with the expression

$$\frac{N^{1/2}}{R_0^2}\{S_N - E(S_N) + 2[\sum_{k=1-N}^{N-1}(1-\frac{|k|}{N})^2\alpha_k R_k - R_0^{-1}E(S_N)](C_{0,N}-R_0) - 2R_0\Psi_N(\alpha)\}. \quad (13)$$

But it was shown elsewhere [5, Section 21] that the joint distribution of the three random variables

$$N^{1/2}[S_N - E(S_N)] = \tfrac{1}{2}N^{1/2}[\Delta_N - E(\Delta_N)] + N^{1/2}\Psi_N(R),$$
$$N^{1/2}(C_{0,N}-R_0), \text{ and } N^{1/2}\Psi_N(\alpha)$$

tended to be normal. Hence the asymptotic normality of (10).

More particularly [cf. [5], equations (22.1), (22.6) and (20.3)], it was shown that

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} S_N = \frac{28}{3}\mathfrak{S}_4 + 4\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2^2;$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov}(S_N, C_{0,N}) = 4\mathfrak{S}_3 + 2\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}\mathfrak{S}_2 R_0;$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var}\Psi_N(\alpha) = 2\sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty}\alpha_p\alpha_q R_{p+s}R_{q+s} + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}[\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\alpha_s R_s]^2.$$

Further special instances of the last-quoted formula yield also

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{var} C_{0,N} = 2\,\mathfrak{S}_2 + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0^2;$$

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov} [\Psi_N(\alpha), C_{0,N}] = 2 \sum_{q,s=-\infty}^{+\infty} \alpha_q R_s R_{q+s} + \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} R_0 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s R_s.$$

Finally, owing to (6), the relation

$$\lim_{N\to\infty} N \operatorname{cov} [S_N, \Psi_N(\alpha)] = 4 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s R_p R_q R_{-p-q-s} + 2 \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} \mathfrak{S}_2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s R_s$$

is easily deducible from the formulae which give the limits of

$$N \operatorname{cov} [\Delta_N, \Psi_N(\alpha)] \text{ and } N \operatorname{cov} [\Psi_N(R), \Psi_N(\alpha)]$$

[cf. [5], equations (21.1) and (20.3)].

These formulae allow us to compute the limit of the variance of (13). If we note that, obviously,

$$\lim_{N\to\infty} [\sum_{k=1-N}^{N-1} (1 - \frac{|k|}{N})^2 \alpha_k R_k - R_0^{-1} E(S_N)] = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \alpha_s R_s - R_0^{-1} \mathfrak{S}_2,$$

we find, after some fairly simple transformations, that this limit is

$$\frac{4}{3} \int_4 + 8 \sum_{p,q,s=-\infty}^{+\infty} (\varrho_p - \alpha_p)(\varrho_q - \alpha_q) \varrho_{p+s} \varrho_{q+s} +$$

$$+ 16 [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varrho_k(\alpha_k - \varrho_k)] [\sum_{q,s=-\infty}^{+\infty} (\varrho_q - \alpha_q) \varrho_s \varrho_{q+s}] + 8 \int_2 [\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\varrho_k - \alpha_k)]^2,$$

which is nothing else but (11) [cf. [5], Lemma 18.2]. Thus the proof of the first part of the proposition is complete.

Now under H_{12n}^*, the $6n$-th moment of $C_{0,N}$ is $O(N^{-3n})$. Hence, according to the Bienaymé-Chebyshev Inequality,

$$P [C_{0,N} < R_0/2] = O(N^{-3n}).$$

But

$$E \{N^{1/4} [z_N(\alpha) - \xi_N(\alpha)]\}^{2n}$$

can be represented as the sum of two probability integrals corresponding to the events $C_{0,N} \geqq R_0/2$ and $C_{0,N} < R_0/2$ respectively. The first of these two probability integrals, clearly, does not exceed $(2/R_0)^{4n} N^n$ times the $2n$-th moment of the expression in curly brackets in the right-hand side of (13), and, therefore, is bounded. On the other hand, it follows from the Schwarz Inequality that $|(1 - N^{-1}|k|) C_{k,N}| \leqq C_{0,N}$.

Consequently, according to (9), the value of (10) is bounded by $2\,N^{3/4}$, so that the second probability integral cannot exceed

$$2^{2n}\,N^{3n}\,P\,[C_{0,N} < R_0/2],$$

which is also bounded. Thus the moment under consideration is bounded. Since, under the same assumptions H^*_{12n}, the distribution of (10) tends to be normal, it follows from a theorem given by Loève ([4]; also stated in a convenient form in [5], Proposition 9.3) that all the moments of (10) of order *lower* than $2\,n$ tend to the corresponding moments of the normal distribution in question. Hence the proof is complete.

It may be noted that the asymptotic distribution of (10) is again independent of the kurtosis of the variables generating the process in question. If $G(\omega)$, or $g(\omega)$, is identically equal to 0, then $Z_N(A)$, or $z_N(\alpha)$, reduces to S_N, or to s_N, and indeed the previously [5] obtained results concerning S_N and s_N are contained in the present Propositions 1 and 2. It can be seen directly from (5) that, for a given "true" process, var $Z_N(A)$ has the smallest asymptotic variance when $A=R$. A similar conclusion applies to $z_N(\alpha)$, since, according to the Schwarz Inequality, $\int^2_{2,1} \leqq \int_2 \int_{2,2}$, which entails

$$8\int_{2,2} - 16\int_{1,1}\int_{2,1} + 8\int^2_{1,1}\int_2 \geqq 0,$$

so that (11) is bigger than, or equal to, $^4/_3\int_4$. Equality can occur only when $[f'(\omega) - g'(\omega)]\,f'(\omega)$ is proportional to $f'(\omega)$, which, under our assumptions, is possible only if $f'(\omega) - g'(\omega)$ is a constant. However, if $g'(\omega)$ is capable of being a reduced spectral density function, then, necessarily

$$\int_{-1/2}^{1/2} g'(\omega)\,d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} f'(\omega)\,d\omega = 1,$$

making this constant equal to 0.

Clearly, $z_N(\alpha)$ can be used to test the hypothesis that $f'(\omega) = g'(\omega)$, i. e. $\varrho = \alpha$. The situation is entirely analogous to that which was discussed in Section 2, and the same kind of argument shows that given any alternative hypothesis satisfying H^*_8, the loss of power following the adoption of a one-sided test is asymptotically negligible.

References

[1] *H. Cramér*, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946.

[2] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, "Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes", Ann. Math. Statist. Vol. **24**, pp. 537—558 (1953).

[3] *U. Grenander* and *M. Rosenblatt*, Statistical Analysis of Stationary Time Series, John Wiley and Sons, New York, 1957.

[4] *M. Loève*, Probability Theory. Foundations. Random Sequences, D. van Nostrand Co. New York, 1955.

[5] *Z. A. Lomnicki* and *S. K. Zaremba*, "On some moments and distributions occurring in the theory of linear stochastic processes", Monatsh. Math.: Part I, Vol. **61** (1957), pp. 318—358; Part II, Vol. **63**, pp. 128—168 (1959). In Part I the following two misprints should be corrected: On p. 150 $C^{(N)}_{p,q,s}$ should be replaced by $c^{(N)}_{p,q,s}$; on p. 165 the numbers in the last line of the table should read 1.0000, $^{28}/_{3}$=9.3333, and 4 respectively.

[6] *A. M. Walker*, "A goodness of fit test for spectral distribution functions of stationary time series with normal residuals", Biometrika, Vol. **43**, pp. 257—275 (1956).

Buchbesprechungen

Opere. Vol. XI. Corrispondenza. Von *L. Bianchi.* (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) 302 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1959. Lire 3000.—.

In diesem Band sind 176 Briefe aus den Jahren 1880—1923 abgedruckt, die entweder namhafte Mathematiker der damaligen Zeit an *Bianchi* gerichtet haben oder von ihm selber geschrieben wurden, darunter die Briefe an *G. Darboux*, die in Paris verwahrt sind. Die Briefe enthalten, neben persönlichen Mitteilungen, Erörterungen über mathematische Fragen, die damals aktuell waren und haben hierdurch historisches Interesse. *K. Mayrhofer*, Wien

Opere Scelte. Vol. III: Geometria e fondamenti di meccanica razionale. — Varie. Von *G. Peano.* (A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.) VII, 470 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1959. Lire 5000.—.

Mit diesem Band wird die Herausgabe der ausgewählten Werke von *G. Peano* abgeschlossen. Er enthält eine Anzahl von Arbeiten über Geometrie, über Grundlagen der Arithmetik und über analytische Mechanik, ferner einige Rezensionen sowie eine Reihe von Abhandlungen mannigfachen Inhaltes. Letztere lassen erkennen, wie umfangreich das wissenschaftliche Interesse *Peanos* war, worüber er selber folgendes sagt: „Es ist gut, das Studium nicht nur auf die Mathematik zu beschränken, da die ganze Wissenschaft schön ist, wenn man sie um ihrer selbst willen betreibt, und nicht nur um zu prüfen und von ihr zu leben".
K. Mayrhofer, Wien

On Mathematics and Mathematicians. (Formerly titled: Memorabilia Mathematica or the Philomaths's Quotation-Book.) Von *R. E. Moritz.* (Dover Books on Science.) VII, 410 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 1.95.

Das Buch ist ein Nachdruck der ersten, 1914 erschienenen Auflage und besteht aus über 1100 Zitaten über Mathematik und über Mathematiker. Sie stammen von Philosophen, Historikern, Dichtern, Staatsmännern und Mathematikern. Sie besagen, was Mathematik ist und welche Stellung sie in den Wissenschaften einnimmt. Zwei Kapitel bringen Anekdoten über Mathematiker. Die Zitate sind Büchern und Schriften entnommen, die oft weit zurückliegen. Sie sind teils realistisch, teils aber auch gefühlsbedingt. Laien und Fachleute werden das Buch mit Vergnügen lesen. *N. Hofreiter*, Wien

Reflections of a Mathematician. Von *L. J. Mordell.* VII, 50 S. Montreal: Canadian Mathematical Congress, Chemistry Building, McGill University or Ecole Polytechnique. 1959.

Alle, die den Autor kennen, werden bestätigen, daß das Buch ein sehr gelungenes Bild von ihm bringt. Das Buch ist für einen großen Leserkreis geschrieben;

für Mathematiker und für alle, die Interesse dafür haben, was Mathematik ist, welche Schwierigkeiten das Studium der Mathematik bringt, wie der Mathematiker die Probleme findet und wie er sie löst. Besonders interessant sind die vielen persönlichen Bemerkungen. Wohl gibt der Autor einige seiner bedeutendsten Arbeiten an, aber seine Fähigkeiten werden in viel zu bescheidener Weise erwähnt. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematik und Kunst. Von *K. Menninger*. (Kleine Vandenhoeck-Reihe: Nr. 78.) 44 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1959. DM 2.40.

In diesem Büchlein behandelt der Verfasser das Verhältnis der Mathematik zur Kunst. Die Mathematik als Lehre von der Ordnung greift überall in unser Leben ein, in alle Wissenschaften und auch in die Kunst. Die Mathematik behindert jedoch nicht etwa das Künstlerische, sie ist auch nicht bloß eine Hilfswissenschaft für die Kunst, sie ist vielmehr wesensverwandt mit der Kunst. Um diese Tatsache nachzuweisen, führt der Verfasser den Leser auf interessanten Wegen durch Bereiche der Musik, der Dichtung und der bildenden Kunst.
J. Laub, Wien

Fallacies in Mathematics. Von *E. A. Maxwell*. Mit 23 Textabb., 95 S. Cambridge: At the University Press. 1959. Geb. 13/6 net.

An 32 (zum Teil wohlbekannten) Trugschlüssen aus der Elementargeometrie, der Algebra, der Trigonometrie, der Reihenlehre und der Differential- und Integralrechnung führt der Verfasser den Leser auf unterhaltsame Weise durch Teilgebiete der Mathematik. Sollte es dem Leser nicht gelingen, die Trugschlüsse selbst zu klären, so findet er im jeweiligen Anhang genügend Hinweise vor.
J. Laub, Wien

Mathematisches Wörterbuch: Russisch-Deutsch, Russisch-Englisch. Mit einer kurzen Grammatik. 224 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 9.80.

Dieses Wörterbuch gibt die deutsche und englische Übersetzung der russischen Fachausdrücke und kommt damit einem dringenden Bedürfnis entgegen. Es wurden auch die Namen einiger Mathematiker aufgenommen. Dies ist vorteilhaft, da nur zu oft die Namen nichtrussischer Gelehrter durch Übertragung ihrer Namen in cyrillischer Schrift und nachfolgende Rückübersetzung stark verändert werden können (z. B. Hilbert — Gilbert). Eine kurzgefaßte russische Grammatik in deutscher und englischer Sprache ist als besonders wertvoll anzusehen ebenso wie die Aussprachebezeichnungen. Da das Studium der mathematischen Arbeiten, die in russischer Sprache erscheinen, für jeden Mathematiker sehr wichtig ist, wird das Erscheinen dieses Wörterbuches von allen wärmstens begrüßt werden. *K. Prachar*, Wien

Foundations of Set Theory. Von *A. A. Fraenkel* und *Y. Bar-Hillel*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) X, 415 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1958. hfl. 42.—.

Der vorliegende Band befaßt sich nicht nur mit den logischen Grundlagen der Mengenlehre, sondern weist auch auf die Verbindungen der Mengenlehre als Instrument der Grundlagenforschung zur Philosophie hin. Es ist hier nicht möglich, den reichen Inhalt des Buches voll zu würdigen; es stellt nicht nur eine

geradezu fesselnd geschriebene Einführung in die Problematik der mathematischen Grundlagenforschung dar, es ist auch als ein Handbuch für weitergehende Untersuchungen gedacht. Diesem Zwecke dienen das 51 Seiten umfassende Literaturverzeichnis und zahlreiche Hinweise im Text. Das erste Kapitel behandelt kurz die Antinomien, wobei nach *Ramsey* zwischen Antinomien der Logik einerseits und der Semantik andererseits unterschieden wird. Das zweite Kapitel ist der axiomatischen Grundlegung der Mengenlehre gewidmet. Das zugrundegelegte Axiomensystem ist das *Zermelo-Fraenkel*'sche System. Das Auswahlaxiom wird einer eingehenden Betrachtung unterzogen; es werden die Gründe für seine Annahme bzw. Ablehnung untersucht. Es folgt sodann eine Diskussion der Ansätze von *von Neumann*, *Bernays* und *Gödel*. Der Rest des Kapitels ist der Entwicklung der Sätze der eigentlichen Mengentheorie aus den Axiomen gewidmet. Im dritten Kapitel werden sogenannte typentheoretische Ansätze besprochen. Der Idealkalkül (*Hermes-Scholz*) wird einer Kritik unterzogen (es wird ein formales Gegenstück zur Antinomie von *Russel* konstruiert), weiter die Allgemeine Klassentheorie (*Tarski*) und der Ansatz von *Quine* behandelt. Es folgen die Systeme von *Wang* und *Lorenzen*, sowie einige merkwürdige Ansätze (*Leśniewski*, *Chwistek*). Das vierte Kapitel ist dem Intuitionismus gewidmet, wohl der radikalsten Richtung in der Grundlagenforschung der Mathematik. Der konstruktive Charakter der Mathematik wird klargelegt, das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten kritisch betrachtet. Ausführlich wird auf das Verhältnis Mathematik-Logik eingegangen. Den Abschluß des Kapitels bildet ein Abschnitt über die Einschränkungen der Mathematik, die bei Anerkennung des intuitionistischen Standpunktes notwendig sind. Das letzte Kapitel behandelt mathematische und semantische Ansätze, vor allem die Beweistheorie *Hilberts* und die damit verbundenen Begriffe der formalen Systeme, Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit. Es folgt eine Darstellung der Unterscheidbarkeitstheoreme von *Gödel*, *Church*' und *Tarski*. Den Schluß des Kapitels bilden einige Bemerkungen über das Verhältnis der Philosophie zur Mengenlehre. Die zahlreichen historischen Hinweise sind auch von großem Interesse für die Entwicklung der Mathematik unseres Jahrhunderts.

J. Roppert, Wien

Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium Held at Amsterdam, 1957. Herausgegeben von *A. Heyting*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 297 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1959. hfl. 30.—.

Im Gegensatz zu der klassischen Auffassung der Mathematik, wo die allgemeinen Begriffe, wie Zahlen, Mengen, Funktionen usw. als gegebene Dinge hingenommen werden, sieht die konstruktive Mathematik nur das als existierend an, was tatsächlich konstruiert werden kann. Vertreter dieser Richtung hielten im August 1957 in Amsterdam ein internationales Kolloquium ab, dessen Vorträge in dem Buch wiedergegeben werden; ein Anhang enthält die Auszüge dreier im selben Jahr in Amerika gehaltener Vorträge. Die einzelnen Beiträge des Bandes stammen von folgenden Mathematikern: *Bernays*, *Beth*, *Davis*, *Fitch*, *Goodstein*, *Grzegorczyk*, *Hermes*, *Heyting*, *Kalmár*, *Kleene*, *Kreisel*, *Lacombe*, *Löb*, *Lorenzen*, *Mostowski*, *Myhill*, *Nelson*, *Péter*, *Rasiowa*, *Schoenfield*, *Sikorski*, *Specker*, *Wette*.

W. Nöbauer, Wien

Toward a Systematic Pragmatics. Von *R. M. Martin*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XV, 107 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1959. hfl. 12.—.

Das logische Studium einer Sprache erfolgt in drei Stufen: Die Syntax beschäftigt sich nur mit den Ausdrücken der Sprache und ihren Relationen; die Semantik bezieht auch die Objekte ein, die von den sprachlichen Ausdrücken bezeichnet werden; bei der Pragmatik werden zusätzlich zur Semantik (eventuell auch nur Syntax) auch noch die Benützer der Sprache betrachtet. Im Gegensatz zur Syntax und Semantik ist man auf dem Gebiete der Pragmatik von einer ausgebauten Theorie noch weit entfernt, das vorliegende Buch ist als Ansatz zu einer solchen daher sehr zu begrüßen. Sein Kernstück besteht in der Einführung einer pragmatischen Metasprache, welche aus einer geeignet gewählten semantischen Metasprache durch Hinzunahme einer Relation „Annehmen" und einer Relation zwischen Zeitabschnitten entsteht. Anhand dieser Metasprache wird der Versuch unternommen, verschiedene pragmatische Begriffe, wie subjektive Auffassung, Verstehen, Äußerung usw. exakt zu erfassen, es werden aber auch noch andere pragmatische Metasprachen untersucht.

W. Nöbauer, Wien

A Method in Proofs of Undefinability. With applications to functions in the arithmetic of natural numbers. Von *K. L. de Bouvère*. VII, 64 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1959. hfl. 7.50.

Diese Studie beschäftigt sich mit Problemen der Definierbarkeit und Undefinierbarkeit von Relationskonstanten und Operationskonstanten in Theorien mit Standardformalisierung. Vor allem wird eine neue Methode für Undefinierbarkeitsbeweise entwickelt, welche auf der Charakterisierung der Definierbarkeit mit Hilfe von Modellen beruht. Außerdem werden Anwendungen dieser Methode auf die Arithmetik der natürlichen Zahlen in Standardformalisierung gebracht und schließlich noch einige Untersuchungen über Definierbarkeit bzw. Undefinierbarkeit durch Gleichungen angestellt. *W. Nöbauer*, Wien

Determinanten und Matrizen. Von *F. Neiß* †. Fünfte Auflage. Mit 1 Textabb., VII, 111 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. DM 6.60.

In rascher Folge erschienen Auflagen des beliebten und als Einführung in die lineare Algebra sehr gut geeigneten Buches. Die erste Auflage kam 1941 heraus und wurde in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **51**, 16 [1943]) besprochen. Da 1952 der Verfasser starb, so bringen die letzten Auflagen keine nennenswerten Änderungen. Besondere Vorzüge des Buches sind die leichte Lesbarkeit, die strenge und ausführliche Durchführung der Beweise und die zahlreichen Übungsaufgaben. Dadurch ist es den Studierenden der ersten Semester besonders zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Matrix Calculus. Von *E. Bodewig*. Zweite durchgesehene und erweiterte Auflage. XI, 452 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1959. hfl. 32.50.

Die erste Auflage dieses Buches ist 1956 erschienen und in Band **61**, S. 78 (1957), der „Monatshefte für Mathematik" besprochen worden. Ihr gegenüber wurde die vorliegende zweite Auflage durch verschiedene Ergänzungen bereichert, vor allem wurde der Abschnitt über Eigenwerte und Eigenvektoren erweitert. Wie schon bei der Besprechung der ersten Auflage festgestellt wurde, enthält das Buch sehr viele für das numerische Rechnen verwendbare Methoden und ist daher für den praktischen Mathematiker von großem Wert. *W. Nöbauer*, Wien

Matrizenrechnung. Teil II: Spezielle Fragen und Anwendungen. Von *F. R. Gantmacher*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 37.) Mit 4 Textabb., VII, 244 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 26.—.

Die deutsche Übersetzung von *Gantmachers* 1954 in russischer Sprache erschienenem Buch besteht aus zwei Teilen, von denen der erste Teil in Band 63, S. 86 (1959) der „Monatshefte für Mathematik" besprochen wurde. Der vorliegende zweite Teil enthält die Kapitel, welche sich mit speziellen Fragen und Anwendungen der Matrizenrechnung beschäftigen. Kapitel XI untersucht die komplexen symmetrischen, schiefsymmetrischen und orthogonalen Matrizen und ihre Normalformen, in Kapitel XII werden die singulären Matrizenbüschel studiert. Das nächste Kapitel enthält die Theorie der Matrizen mit nichtnegativen Elementen und behandelt insbesondere auch stochastische Matrizen und *Markoff*-Ketten. Kapitel XIV bringt die Anwendung der Matrizenrechnung auf lineare Differentialgleichungssysteme, während das letzte Kapitel sich mit Sätzen über die Lage der Nullstellen algebraischer Gleichungen, wie z. B. dem Satz von *Routh-Hurwitz*, beschäftigt. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis beschließt das wertvolle Werk. *W. Nöbauer*, Wien

Algebra liniowa. Von *A. Mostowski* und *M. Stark*. (Bibliotheka matematyczna: Band 19.) 188 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958.

Dieses für den Anfänger geschriebene Buch soll dem Studenten der Mathematik in möglichst voraussetzungsloser Form ein etwas über das übliche Maß hinausgehendes Wissen aus der linearen Algebra vermitteln. Es beginnt mit einem Abschnitt über lineare Räume. Nach Einführung der linearen Transformationen wird deren Struktur im dritten Abschnitt genauer untersucht; dieser bringt eine gut lesbare Einführung in die Elementarteilertheorie mit zahlreichen Beispielen und Übungen. Auch die Anwendung dieser Theorie auf Systeme linearer Differentialgleichungen wird besprochen. *Hermite*sche Formen und unitäre Räume bilden den Inhalt der beiden folgenden Abschnitte, wobei z. B. auch die *Caley*sche Form der unitären Transformationen hergeleitet wird. Ein Schlußwort bringt Hinweise auf weitere Literatur. Alles in allem ein wohldurchdachtes und in pädagogischer Hinsicht ausgezeichnetes Buch, welches eine verhältnismäßig mühelose Einführung auch in einige speziellere Teile der linearen Algebra bietet. *K. Prachar*, Wien

Applications of Finite Groups. Von *J. S. Lomont*. XI, 346 S. New York—London: Academic Press. 1959. $ 11.—.

In der modernen theoretischen Physik gewinnt die Anwendung gruppentheoretischer Methoden immer mehr an Bedeutung. Das vorliegende Werk, welches einerseits die für diese Anwendungen wichtigsten Begriffe und Sätze aus der Gruppentheorie — insbesondere aus der Theorie der Gruppendarstellungen — zusammenstellt und an Beispielen ausführlich erläutert, andererseits zahlreiche Anwendungen dieser Dinge in der Physik behandelt, sollte daher für den Physiker sehr von Nutzen sein, und ist auch vor allem für ihn gedacht, da die Beweise fast aller gruppentheoretischen Sätze weggelassen werden.

Das Buch beginnt mit einem Kapitel über Matrizenrechnung; dann werden die Elemente der Theorie der endlichen Gruppen zusammengestellt und einige physikalische Anwendungen davon besprochen. Nach einem Kapitel über Gruppendarstellungen und Charaktere folgen zahlreiche Anwendungen der

Darstellungstheorie (z. B. *Fermi*-Operatoren, Molekularschwingungen, Kristallsysteme, Wellengleichungen). Weiter wird der Zusammenhang zwischen den Darstellungen einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen behandelt und auf die kristallographischen Raumgruppen angewendet. Schließlich werden die Darstellungen der symmetrischen Gruppen besprochen; das Schlußkapitel bringt Anwendungen davon auf Molekular-, Atom- und Kernstrukturen.

W. Nöbauer, Wien

Abelian Groups. Von *L. Fuchs*. 367 S. Budapest: Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences. 1958.

In dieser großangelegten Monographie wird die Theorie der abelschen Gruppen von Grund auf bis zu den neuesten Ergebnissen der Forschung dargestellt. Den Hauptteil des Buches nimmt natürlich die Strukturtheorie ein; hier werden die wesentlichen Resultate über periodische, torsionsfreie und gemischte Gruppen ausführlich entwickelt. Das Werk beschränkt sich aber keineswegs darauf, sondern behandelt auch Dinge, die bisher in Lehrbüchern meist nur am Rande oder überhaupt noch nicht dargestellt wurden, nämlich Homomorphismengruppen und Endomorphismenringe abelscher Gruppen, die *Schreier*sche Erweiterungstheorie für abelsche Gruppen, das Tensorprodukt, additive Gruppen von Ringen und multiplikative Gruppen von Körpern, Untergruppenverbände abelscher Gruppen, Zerlegungen in direkte Summen von Teilmengen (insbesondere den Satz von *Hajos*). Hervorzuheben ist die klare Darstellungsweise; den Text ergänzen über 500 Übungsaufgaben von wechselnder Schwierigkeit; die 86 angegebenen ungelösten Probleme werden manchen Leser zu eigenen Forschungen anregen; selbstverständlich findet man auch ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Alles in allem: Ein imponierendes Werk, das wohl lange Zeit das Standardwerk über abelsche Gruppen bleiben wird und von dem man sicherlich eine außerordentlich fördernde Wirkung auf die weitere Entwicklung dieses Gebietes erwarten kann.

W. Nöbauer, Wien

Algebra. Erster Teil. Von *L. Rédei*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik: Reihe A, Band 26, Teil 1.) Bearbeitete und erweiterte Übersetzung aus dem Ungarischen. Mit 6 Textabb., XV, 797 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1959. Geb. DM 48.—.

Ein wirklich originelles Lehrbuch der Algebra zu schreiben, ist derzeit keineswegs leicht, denn wenn auch seit dem erstmaligen Erscheinen von *van der Waerdens* „Moderner Algebra" schon fast 30 Jahre vergangen sind, so ist doch die Gefahr noch immer sehr groß, allzusehr dem Einfluß dieses meisterhaften Werkes zu unterliegen. Unter den heutigen Mathematikern gibt es wohl kaum einen, dem es besser als dem Verfasser dieses Buches gelungen wäre, dieser Gefahr zu entgehen, ohne sich dabei aber allzusehr in blutlose, überabstrakte Gedankengänge modernster Richtung zu verlieren; es hat ja doch gerade die ungarische algebraische Schule, an deren Spitze er steht, gegenüber der derzeit im Westen üblichen Richtung stets ihre Eigenständigkeit behauptet. Wir freuen uns sehr, daß sein erstmalig 1954 in ungarischer Sprache erschienenes Werk durch die deutsche Übersetzung nun allen Mathematikern zugänglich geworden ist, denn es ist in gleicher Weise wertvoll für den Studenten — vor allem durch seine gründliche, wohldurchdachte Darstellungsweise — als auch für den Kenner des Gebietes — schon allein deshalb, weil es viele Dinge behandelt, die bisher in

keinem Lehrbuch zu finden waren. Von den weiteren Vorzügen des Buches erwähnen wir noch die besondere Betonung der Analogien zwischen Gruppentheorie und Ringtheorie, welche dem Leser den Überblick über die verschiedenen Begriffe und Sätze erleichtert.

Zur Orientierung über den Aufbau des Bandes möge folgender Überblick über die Kapiteleinteilung dienen; wir führen dabei bei jedem Kapitel in Klammern an, was uns von seinem Inhalt besonders bemerkenswert erscheint: Mengentheoretische Grundlegung. Strukturen (die *Everett*sche Erweiterungstheorie für Ringe, Doppelhomothetismen, die Holomorphe eines Ringes). Operatorstrukturen (der Satz von *Remak — Krull — Schmidt*, verschränkte Produkte, monomiale Ringe). Teilbarkeitslehre in Ringen (der Satz von *Szendrei*, der Ring der ganzen Quaternionen). Endliche abelsche Gruppen (der Satz von *Hajos*, die Umkehrformel von *Delsarte*, Zetafunktionen für endliche abelsche Gruppen). Operatormoduln. Kommutative Polynomringe (der Satz von *Szekeres* und der Satz von *Kronecker — Hensel, Tschirnhaus*sche Transformationen von Idealen, die durch ein Element erzeugbaren Ringe). Körpertheorie (der Satz von *König — Rados, Ore*sche Polynomringe). Angeordnete Strukturen. Bewertete Körper. Die Theorie von *Galois* (der quadratische Reziprozitätssatz mit Beweis nach *Mirimanoff — Hensel*, Gleichungen dritten und vierten Grades über endlichen Körpern, merkwürdige Punkte des Dreiecks). Endliche einstufig nichtkommutative Strukturen (endliche einstufig nichtkommutative Gruppen, endliche einstufig nichtkommutative Ringe, endliche einstufig nichtkommutative Halbgruppen).

Bei der Fülle des in dem Band behandelten Materiales könnte fast schon die Frage auftauchen, ob noch genug Stoff für einen zweiten Teil geblieben ist. Was aber den vorliegenden ersten betrifft, so sprechen wir wohl im Namen aller Mathematiker, wenn wir dem Verfasser für die Herausgabe der deutschen Fassung unseren aufrichtigen Dank ausdrücken. *W. Nöbauer*, Wien

Structures algébriques et structures topologiques. Von *H. Cartan, G. Choquet, J. Dixmier, P. Dubreil, R. Godement, P. Lelong, L. Lesieur, A. Lichnerowicz, C. Pisot, A. Revuz, L. Schwartz, J.-P. Serre.* (Monographies de l'Enseignement Mathématique: No. 7.) 198 S. Genève: Institut de Mathématiques, Université; Paris: Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. 1958. sfr. 20.—.

Bei dem Buch handelt es sich um die Wiedergabe von Vorträgen, welche von den Autoren in den Jahren 1956 bis 1957 an der Sorbonne gehalten wurden. Diese Vorträge behandeln in einführender Weise wichtige Grundbegriffe der Algebra und Topologie, und zwar im einzelnen: Algebraische Strukturen im allgemeinen; Ringe, Kongruenzen, Ideale; Vektorräume und lineare Gleichungen; lineare Abbildungen und Matrizen; quadratische und hermitesche Formen; klassische Gruppen; projektive Räume. Die Menge der reellen Zahlen; euklidische und metrische Räume; Funktionenräume; Begriffe der allgemeinen Topologie; kompakte und lokal kompakte Räume; topologische Vektorräume; Dimensionsbegriff; Fundamentalgruppe; Homologie.

Der Band bildet eine wertvolle Bereicherung der Monographienreihe von l'Enseignement Mathématique. *W. Nöbauer*, Wien

Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen. Von *E. Landau.* Neu herausgegeben von *A. Walfisz.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 44). 87 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Brosch. DM 7.20.

Dieses kleine Buch bringt eine Neuauflage eines Teiles aus dem Buch „Vorlesungen über Zahlentheorie" von *Landau*. Darin bewies *Landau* die Approximationssätze von *Thue* und *Siegel*. Hier werden diese Sätze durch den schärferen Approximationssatz von *Roth* ersetzt. Er lautet: Hat die Ungleichung

$$|a - \frac{h}{q}| < \frac{1}{q^{\varkappa}},$$

wobei a eine irrationale, algebraische Zahl ist, unendlich viele ganzzahlige Lösungen h, q mit $q > 0$, so ist $\varkappa \leqq 2$. Da der Beweis dieses Satzes sehr lang ist, so hat sich der Umfang wesentlich erhöht. *N. Hofreiter*, Wien

Fundamentals of Freshman Mathematics. Von *C. B. Allendoerfer* und *C. O. Oakley*. Mit 194 Textabb., XIII, 475 S. New York—Toronto—London: Mc Graw-Hill Book Co. 1959. Geb. 50/6 d.

Das Buch liefert einen wertvollen Beitrag zur Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Eine gewisse Überschneidung mit dem Buch „Principles of Mathematics" der Verfasser (siehe Mh. Math. **60**, S. 85 (1956)) war nicht zu vermeiden. Es sind aber doch auch wesentliche Unterschiede vorhanden. Die Studenten sollen nicht bloß rechnen lernen, sie sollen die Mathematik auch begreifen. Sie sollen die grundlegenden Ideen und die theoretischen Entwicklungen verstehen lernen. Daher handelt das erste Kapitel von der logischen Struktur der Mathematik und das zweite Kapitel vom Zahlbegriff. Die weiteren Kapitel bringen jene Teile der Mathematik, die in den Schulen gelehrt werden, und zwar Algebra, Trigonometrie und Analytische Geometrie von höherem Standpunkt. Die Differential- und Integralrechnung werden intuitiv behandelt. Eine sehr gute Darstellung und eine große Anzahl von Übungsaufgaben samt Lösungen zeichnen das Buch aus. Es ist besonders den Lehramtskandidaten und den Gymnasiallehrern zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

A Modern Introduction to College Mathematics. Von *I. H. Rose*. Mit 168 Textabb., XXI, 530 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapmann & Hall. 1959. $ 6.50.

Das Buch beginnt mit grundlegenden Begriffen, wie Menge, Abbildung Funktion, Operator und Relation. Es wird dabei von einfachen Beispielen ausgegangen, das Gemeinsame festgestellt und durch Abstraktion werden die Begriffe gewonnen. Es wird Wert darauf gelegt, Ideen, die der Mathematik zugrunde liegen, klar herauszuarbeiten und die logische Struktur der Mathematik aufzuweisen. Es wird die Bedeutung der mathematischen Modelle für konkrete Situationen gezeigt. Es kommt aber auch die Bedeutung der Mathematik für die Anwendungen nicht zu kurz. Zahlreich sind die historischen Bemerkungen und eine große Anzahl von Aufgaben dient zur Einübung. Inhaltlich bringt das Buch eine Einführung in die Analytische Geometrie und in die Trigonometrie. In nur zwei Kapiteln werden die Differential- und Integralrechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik behandelt. Die Darstellung ist leicht verständlich. Obwohl das Buch für Anfänger geschrieben ist, ist das Niveau erfreulich hoch. Der Autor bemüht sich mit großem Erfolg, den jungen Studierenden eine recht gute Einführung in die Mathematik zu geben.

N. Hofreiter, Wien

Vorlesungen über höhere Mathematik. 2. Band: Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Lineare Algebra. Tensorfelder. Differentialgeometrie. Von *A. Duschek*. Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 136 Textabb., VIII, 401 S. Wien: Springer-Verlag. 1958. ö. S. 270.—; Ganzleinen ö. S. 288.—.

Vergleicht man die zweite Auflage vom II. Band mit der ersten Auflage, die in dieser Zeitschrift (Mh. Math. **55**, 252 (1951)) besprochen wurde, so sieht man, daß die folgenden zwei Abschnitte nicht mehr im II. Band der neuen Auflage vorkommen: 1. Unendliche Reihen und 2. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die unendlichen Reihen kommen jetzt schon im I. Band vor, wohin sie auch besser passen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in der neuen Auflage nicht mehr aufgenommen. Sie wird an allen Hochschulen als eigene Vorlesung gehalten und kommt daher in den Hauptvorlesungen über Mathematik nicht mehr vor. Neuaufgenommen wurde eine Einführung in die Differentialgeometrie und zwar Kurven- und Flächentheorie auf tensorieller Grundlage. Analog wie Band I ist auch Band II für die Neuauflage gründlich umgearbeitet worden. Sehr oft merkt man die Tendenz, eine exaktere Darstellung als bisher zu geben, was besonders erwähnenswert ist. Die ersten beiden Bände gehören eng zusammen und bilden ein einheitliches, für sich abgeschlossenes Ganzes. Sie bilden die Grundlagen für den III. und IV. Band, die gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Integralgleichungen und Variationsrechnung beinhalten.

N. Hofreiter, Wien

Repetitorium der elementaren Funktionentheorie. Von *M. W. Keldysch*. Übersetzung aus dem Russischen. Mit 25 Textabb., 76 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Brosch. DM 3.60.

Es ist ein sehr dankenswertes Unternehmen, für ein spezielles Teilgebiet der Mathematik dessen Probleme und Entwicklungen, sowie dessen Anwendungen in kurzer, aber möglichst allgemein verständlicher Weise darzustellen. Dem Autor des Büchleins, das der Funktionentheorie gewidmet ist, ist dieses Anliegen ausgezeichnet gelungen, und man kann die Übersetzung ins Deutsche nur begrüßen.

H. Hornich, Wien

Einführung in die Funktionentheorie. Teil II. Von *I. I. Priwalow*. Deutsch von *V. Ziegler*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 22.) Mit 28 Textabb., V, 194 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 8.—.

Dieser Band bringt die Integrationen im Komplexen, Reihen von holomorphen Funktionen, isolierte Singularitäten, die Residuentheorie, den Satz von *Picard*, unendliche Produkte und ihre Anwendung auf holomorphe Funktionen und die analytische Fortsetzung. Die Darstellung ist genau so wie im Teil I (siehe das Referat in Mh. Math. **63**, 195 (1959)) klar und ausführlich, und daher sind beide Teile als Lehrbücher sehr gut geeignet.

N. Hofreiter, Wien

Praxis der konformen Abbildung. Von *W. von Koppenfels* † und *F. Stallmann*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 100.) Mit 251 Textabb., XIII, 375 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Geb. DM 64.80; Gln. DM 69.—.

Im Krieg war geplant, ein Sammelwerk über konforme Abbildung herauszugeben, das kein Lehrbuch, sondern ein Nachschlagewerk sein sollte, das insbesondere Ingenieuren und angewandten Mathematikern dienen sollte. Später war wieder viel mehr Interesse für die Theorie vorhanden und so kam es, daß das Buch jetzt aus zwei Teilen besteht: A) Theorie der konformen Abbildung, B) Katalog der konformen Abbildung. Der erste Teil besteht aus einer Einführung in die Funktionentheorie mit besonderer Betonung der konformen Abbildung. Im Mittelpunkt stehen die Polygonabbildungen (Geradenpolygone, Kreisbogenpolygone, Polygone in Isothermennetzen). Neben theoretischen Lösungsmethoden (insbesondere *Schwarz-Christoffel*sche Formel) werden auch Näherungsverfahren gebracht (numerische und graphische Verfahren, Integralgleichungsverfahren). Der Katalog gibt eine systematische Übersicht über jene Bereiche, deren konforme Abbildung mit den zuerst gegebenen mathematischen Hilfsmitteln möglich ist. Die Abbildungsfunktionen werden bis zur expliziten formelmäßigen Darstellung gebracht. Dies wird in zahlreichen Einzelfällen durchgeführt.

N. Hofreiter, Wien

Orthogonal Polynomials. Von *G. Szegö*. (American Mathematical Society Colloquium Publications: Band XXIII.) Revised Edition. Mit 9 Textabb., VIII, 421 S. New York: American Mathematical Society. 1959. $ 10.60.

Nach mehreren bedeutsamen Arbeiten über orthogonale Polynome war der Verfasser in besonderem Maße berufen, ein Buch über orthogonale Polynome zu schreiben, das 1939 in erster Auflage erschien und als Standardwerk allgemein geschätzt wird. Es ist ein auf sehr hohem Niveau geschriebenes Lehrbuch, das keine Vollständigkeit anstrebt, sondern sich darauf beschränkt, eine neue Darstellung der Haupttheoreme und der wichtigsten Methoden mit besonderer Bevorzugung der neuen Ergebnisse zu bringen. Besonders hervorgehoben seien die Untersuchungen über Nullstellen von orthogonalen Polynomen, die asymptotischen Darstellungen, die Entwicklung von Funktionen nach orthogonalen Polynomen und die Zusammenhänge von Interpolation und mechanischer Quadratur mit orthogonalen Polynomen. Das Buch brachte nicht nur neue Beweise, sondern auch mehrere unveröffentlichte Ergebnisse des Autors. 1949 war das Buch vergriffen, und obwohl Bedarf war, dauerte es zehn Jahre, bis die zweite Auflage herauskam. Um die Herstellung billig zu gestalten, bringt die neue Auflage keine Neubearbeitung, sondern nur geringfügige Änderungen. Im Anhang wurden Polynome von *Pollaczek* betrachtet. Ferner wurden die Abschnitte "Problems and exercises" und "List of references" erweitert.

N. Hofreiter, Wien

Vorlesungen über Differentialgleichungen im Komplexen. Von *W. W. Golubew*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 43.) Übersetzung aus dem Russischen. Mit 104 Textabb., XII, 312 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Geb. DM 32.—.

Das Buch ist eine Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage und bringt demgemäß nur die klassische Theorie, also die Sätze von *Fuchs*, *Painlevé* usw., die hypergeometrischen Funktionen und die Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Auf die zahlreiche neuere Literatur auf diesem Gebiet wird nicht eingegangen. Die Darstellung ist klar und setzt nur die Elemente der Funktionentheorie voraus; jedem Kapitel sind Übungsbeispiele beigefügt. Die Übertragung des Buches ins Deutsche war dankenswert.

H. Hornich, Wien

Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Von *A. N. Tychonoff* und *A. A. Samarski*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 39.) Deutsche Übersetzung nach der 2. russischen Auflage. Mit 97 Textabb., 660 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 42.—.

Entsprechend den Problemen der mathematischen Physik werden hauptsächlich partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung gebracht. Bekanntlich unterscheidet man hyperbolische, parabolische und elliptische Differentialgleichungen. Jedes Kapitel beginnt mit einfachen physikalischen Aufgaben, die auf Gleichungen des dort zu behandelnden Typus führen. Dann folgen Methoden zur Konstruktion von Lösungen der Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen (Trennung der Veränderlichen, sukzessive Approximation, ...). Näherungsmethoden werden nur gelegentlich gebracht. Die Lösungen werden sodann physikalisch interpretiert. Jedes Kapitel schließt mit Aufgaben und zahlreichen Anwendungen aus der Physik (Akustik, Elastizitätstheorie, Elektromagnetismus, Hydrodynamik, Wärmeleitung, ...). Ein großer Anhang bringt spezielle Funktionen und zwar Zylinderfunktionen, Kugelfunktionen, *Hermite*sche Polynome und *Laguerre*sche Polynome. Das Werk ist ob seiner ausführlichen Darstellung als Lehrbuch sehr gut brauchbar. Unter seinen Interessenten werden mehr Physiker als Mathematiker sein.

N. Hofreiter, Wien

Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Von *L. Cesari*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete: Neue Folge, Heft 16.) Mit 37 Textabb., VII, 271 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. DM 68.—.

Das vorliegende Buch ist die erste Darstellung dieses Gebietes, welche das gesamte Gebiet behandelt, geschrieben von einem der ersten Fachleute. Es ist erstaunlich, daß ein einzelner eine Gesamtdarstellung dieses so umfangreichen Gebietes überhaupt nur versuchen konnte. Das Literaturverzeichnis umfaßt mehr als 68 Seiten im Kleindruck. Es muß hervorgehoben werden, daß der Verfasser sowohl die klassischen Untersuchungen, wie z. B. von *Poincaré* behandelt, als auch die neuesten Entwicklungen, an denen der Verfasser an hervorragender Stelle beteiligt war. Das Buch gliedert sich natürlicherweise in vier Teile, 1. Definition der Stabilität und Systeme mit konstanten Koeffizienten, 2. Allgemeine lineare Systeme, 3. Nichtlineare Systeme und 4. Asymptotische Entwicklungen. Diesen ungeheuren Stoff doch auf mehr als 270 Seiten unterzubringen, wurde nur dadurch ermöglicht, daß viele Paragraphen im Kleindruck gesetzt wurden. Die wichtigsten Sätze sind mit Beweisen versehen. Zu vielen anderen wurden wenigstens Beweisskizzen gebracht. Dieses Buch ist für Jahrzehnte ein Standardwerk auf diesem Gebiet, unentbehrlich für Mathematiker, Physiker und Techniker. Die Ausstattung ist, wie bei dem Verlag üblich, dem Inhalt angepaßt.

E. Hlawka, Wien

Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Von *W. Hahn*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete: Neue Folge, Heft 22.) VII, 142 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. DM 28.—.

Dieses Werk ist der sogenannten direkten oder zweiten Methode von *Ljapunov* gewidmet. Es handelt sich hier um Stabilitätsuntersuchungen bei Differentialgleichungen. Diese Methode ist dadurch charakterisiert, daß man versucht, die

Stabilitätskriterien bei Differentialgleichungen mit Hilfe der sogenannten *Ljapunov*schen Funktionen zu erhalten, ohne daß man die Lösungen des Differentialgleichungssystems kennen muß, daß man also Kriterien allein unter Benützung der Differentialgleichungen selbst aufstellt. Ein Spezialfall ist längst bekannt, nämlich der bekannte Satz von *Lagrange*, daß die Gleichgewichtslage eines mechanischen Systems stabil ist, wenn die potentielle Energie dort ein Minimum hat. Hier ist die *Ljapunov*sche Funktion die Energie. Diese Methode hat in jüngster Zeit vor allem in der Regelungstechnik, um nur ein Beispiel herauszugreifen, bedeutende Anwendungen gefunden. Fast alle Arbeiten über diese Methode sind in russischer Sprache erschienen und auch in Zeitschriften, die im allgemeinen nicht leicht zugänglich sind. Daher ist es sehr zu begrüßen, daß der Verfasser diese zusammenfassende Darstellung der so wichtigen Methode gibt und sie dem allgemeinen mathematischen Publikum zugänglich macht. Dieses Buch ist Mathematikern. Physikern und Technikern wärmstens zu empfehlen.

E. Hlawka, Wien

Differenzengleichungen. Von *H. Meschkowski*. (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher: Band XIV.) Mit 14 Textabb., 243 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1959. Geb. DM 36.—.

Bei dem geringen Umfang mußte eine starke Auslese getroffen werden. Differenzengleichungen mit ganzzahligem Argument werden nur kurz behandelt. In den meisten Kapiteln werden Differenzengleichungen für beliebiges komplexes Argument betrachtet. Es werden somit Differenzengleichungen als funktionentheoretische Probleme behandelt, d. h. es wird nach holomorphen Funktionen $u(z)$ gefragt, die der Funktionalgleichung

$$a_r(z)\, u(z+r) + \ldots + a_0(z)\, u(z) = b(z)$$

mit vorgegebenen holomorphen Funktionen $a_\varrho(z)$ und $b(z)$ genügen. Als einfachstes Lösungsverfahren wird die Summationsmethode gebracht. Die durch Differenzengleichungen definierten Funktionen werden näher untersucht und es zeigt sich, daß es auch solche gibt, die keiner Differentialgleichung genügen. So genügt die Γ-funktion einer sehr einfachen Differenzengleichung, aber keiner algebraischen Differentialgleichung. Neben allgemeinen Sätzen über lineare Differenzengleichungen werden Methoden zur Ermittlung der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzengleichung und Methoden zur Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzengleichung entwickelt. Interessant sind die Zusammenhänge von vielen aus der Analysis bekannten Größen und Funktionen, wie *Bernoulli*sche Zahlen und Polynome, *Euler*sche Konstante, *Euler*sche Summenformel, *Stirling*sche Formel, B- und Γ-funktion mit den Differenzengleichungen. Aus geometrischen Differenzengleichungen ergeben sich Zusammenhänge zwischen unendlichen Reihen und unendlichen Produkten. Das Buch enthält viele Beispiele. Die Darstellung ist sehr ausführlich. Leser mit einigen funktionentheoretischen Vorkenntnissen werden es leicht verstehen.

N. Hofreiter, Wien

Metody Przestrzeni Hilberta. Von *K. Maurin*. (Monografie Matematyczne: Band 36.) Mit 6 Textabb., 363 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1959.

Die bisher erschienenen Werke über den *Hilbert*schen Raum behandeln meist nur die abstrakte Theorie und weisen nur gelegentlich auf die Anwendungen hin. Das vorliegende Buch nimmt hier einen ganz anderen Standpunkt ein. Die

abstrakte Theorie wird hier hauptsächlich im Hinblick auf die Anwendungen entwickelt. (Dabei handelt es sich natürlich um „inner-mathematische" Anwendungen.) Großes Gewicht wird auf die Anwendungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen gelegt, wobei jeweils auch die neuesten Ergebnisse verarbeitet wurden. Der Autor hat sich nicht gescheut, auch moderne Theorien in das Buch aufzunehmen. Wir wollen davon hier nur einiges nennen: Der *von Neumann*sche Satz über die Spektralzerlegung, *Banach*sche Algebren, Theorie von *Gelfand* und *Najmark*, Theorie von *Yosida*, Ein Satz von *Gårding* über die Darstellung *Lie*scher Gruppen, Schwache Lösungen von Systemen elliptischer Differentialgleichungen, Methoden von *Trefftz*, *Ritz*, *Galerkin*, Ungleichungen von *Ehrling*, asymptotische Eigenschaften der Spektralzerlegung (Theorie von *Gårding*), Theorie der harmonischen Felder (*Kodaira*), Ergodentheorie (Ergodensätze von *von Neumann* und *Yosida-Kakutani*), kurze Einführung in die Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Vom Leser werden die Grundlagen der allgemeinen Topologie und der Maß- und Integrationstheorie als bekannt vorausgesetzt; im übrigen ist einiges darüber im Anhang ohne Beweise zusammengestellt. Am Ende jedes der zwanzig Kapitel finden sich interessante Aufgaben.

Alles in allem ein Buch von großer Reichhaltigkeit, welches dem Leser verhältnismäßig mühelos viele schöne Ergebnisse vermittelt, die er bisher nur in Originalarbeiten finden konnte. Eine Übersetzung ins Deutsche wäre sehr wünschenswert. *K. Prachar*, Wien

Variationsrechnung. Von *M. Miller*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 24.) Mit 23 Textabb., 133 S., Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 8.10.

Das vorliegende Buch ist als eine kurze Einführung für Hörer in den ersten Semestern gedacht. Der Autor löst seine Aufgabe mit ganz außerordentlichem Geschick. Seine Darstellung ist leicht faßlich und insbesondere sind die Beispiele vorzüglich geeignet, anregend zu wirken. Dies gilt vor allem für die Beispiele zum *Hamilton*schen Prinzip. Der weitaus größte Teil des Buches ist den klassischen Methoden der Variationsrechnung gewidmet. Alles, was über die erste Variation hinausgeht, wird nur sehr knapp behandelt. Hervorgehoben möge aber werden, daß verhältnismäßig ausführlich auf die inverse Aufgabe der Variationsrechnung eingegangen wird. Die letzten 20 Seiten sind den direkten Methoden der Variationsrechnung (*Euler*sche Polygonmethode, *Ritz*sche Methode, Benutzung von *Fourier*schen Reihen) und ihrer Anwendung zur Lösung von Rand- und Eigenwertproblemen gewidmet. Schließlich sei es gestattet, eine Anregung bezüglich einer allfälligen Neuauflage zu geben. Am Schluß von § 24 möge der Leser davor gewarnt werden, anzunehmen, daß gutes Übereinstimmen von Näherungslösung und exakter Lösung auch ein gutes Übereinstimmen der Differentialquotienten nach sich zieht. Derartige fälschliche Annahmen werden leider in unzulässiger Weise in der Praxis oft gemacht. *P. Funk*, Wien

Abelian Varieties. Von *S. Lang*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Number 7.) XII, 256 S. New York—London: Interscience Publishers. 1959. $ 7.25.

Die Entdeckung der abelschen Mannigfaltigkeiten (a. M.) gelang historisch durch die Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems und die Konstruktion der allgemeinen abelschen Funktionenkörper K von p Variablen. Bekanntlich besteht zwischen $p+1$ Funktionen desselben Körpers K mindestens eine algebraische

Beziehung, die im allgemeinen eine a. M. definiert. Insbesondere gibt es zu jedem Körper eine Picardsche Mannigfaltigkeit, deren rational transformierte die a. M. sind. Für die Picardsche Mannigfaltigkeit ist es charakteristisch, daß sie eine p-gliedrige kontinuierliche, kommutative und absolut transitive Gruppe von birationalen Transformationen in sich zuläßt. *André Weil*, auf dessen Konzeptionen und Forschungen das vorliegende Werk hauptsächlich beruht, nahm diese Eigenschaft zum Ausgangspunkt für seine neue Definition der a. M. als Gruppenmannigfaltigkeiten. Diese Definition ist allgemeiner als die klassische, weil sie auch Mannigfaltigkeiten über Grundkörpern von Primzahlcharakteristik umfaßt.

Aus dieser abstrakten Definition werden zunächst allgemeine Eigenschaften der a. M. hergeleitet. Alle weiteren Untersuchungen, die hier behandelt werden, sind nach dem Problem ausgerichtet, einer beliebigen algebraischen Mannigfaltigkeit V eine Picardsche Mannigfaltigkeit zuzuordnen. Dafür gibt es, wie die italienische Schule ermittelte, zwei Möglichkeiten, deren zweite, die sogenannte Albanesesche Mannigfaltigkeit, hier ausgenützt wird. Die Hauptpunkte dieser Entwicklungen sind: Konstruktion der Jacobischen Mannigfaltigkeit einer Kurve als erstes wichtiges Beispiel einer a. M., Konstruktion der Albaneseschen Mannigfaltigkeit einer beliebigen V mit Hilfe der Jacobischen Mannigfaltigkeit einer allgemeinen Kurve auf V, Definition, Existenz und Eindeutigkeit der zu einer a. M. gehörigen Picardschen Mannigfaltigkeit. Außer den grundlegenden Arbeiten von *A. Weil* werden in diesem Buch auch die neuesten Ergebnisse der auf diesem Gebiet sehr intensiv betriebenen Forschungen dargestellt, insbesondere diejenigen von *W. L. Chow*, *Barsotti*, *Igusa*, *Matsusaka*, *Néron* u. a. Der Verf. hat vor kurzem in derselben Sammlung als Nr. 5 eine Einführung in die algebraische Geometrie veröffentlicht (s. diese Monatshefte **63**, 410), in welcher die für das vorliegende Werk notwendigen Grundlagen gelegt werden. Beide Bücher zusammen können als eine sehr dankenswerte Leistung gewertet werden, denn sie liefern eine übersichtliche Darstellung dieser in den einzelnen Veröffentlichungen schwer zugänglichen und verständlichen Theorien.

W. Gröbner, Innsbruck

Kurven und Flächen. Von *A. D. Alexandrow*. Deutsche Übersetzung aus dem Russischen. Mit 52 Textabb., 82 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Brosch. DM 4.—.

A. D. Alexandrow ist es in diesem 1956 in russischer Sprache erschienenen und jetzt auch in deutscher Sprache vorliegendem Buche gelungen, unter weitgehendster Ausschaltung mathematischen Satzes eine kurzgefaßte, prägnante Einführung in den Begriffsapparat der Differentialgeometrie zu geben. Ausgehend vom Wissen etwa eines Maturanten werden Grundzüge der Kurventheorie, der inneren und äußeren Flächentheorie behandelt. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die verschiedenen Methoden differentialgeometrischer Untersuchungen verwendet, die an Hand markanter Beispiele illustriert werden. So finden sich auch Hinweise auf die von dem Verfasser, *A. W. Pogorelow* u. a. entdeckten Ergebnisse über nichtreguläre Flächen sowie Bemerkungen zur Geometrie im großen. Die 52 instruktiven Textfiguren sowie vor allem die einfache und klare Sprache des Autors ermöglichen es auch jedem Nichtmathematiker, an Hand dieses Büchleins eine erste Orientierung über die Probleme der Differentialgeometrie zu gewinnen.

H. Brauner, Wien

Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Von *P. K. Raschewski*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 42.) Mit 32 Textabb., 606 S. Deutsche Über-

setzung aus dem Russischen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 42.—.

Dieses Buch ist 1953 in Moskau erschienen und liegt nun in deutscher Übersetzung vor. Trotz des bedeutenden Umfanges ist es eher ein Lehrbuch als ein Handbuch; dies ist einerseits durch die Stoffauswahl und andererseits durch die methodisch durchgearbeitete, ziemlich breite Darstellung und das Fehlen jeglicher historischer Hinweise bedingt. Die äußerst spärlichen Literaturzitate des Textes sind durch ein allerdings erst von den Herausgebern hinzugefügtes Literaturverzeichnis am Schluß des Buches ergänzt. Jeder neu einzuführende Begriff wird durch schrittweise, meist ziemlich breit ausgeführte Verallgemeinerung bekannter geometrischer Tatsachen gewonnen. So führt der Autor etwa erst in der Mitte des Buches nach ausführlicher Besprechung der Verhältnisse im euklidischen und affinen Raum die Begriffe der Mannigfaltigkeit und die krummlinigen Koordinaten ein. Ein besonderes Anliegen ist die enge Verknüpfung zwischen dem rein mathematischen Problemen und ihren physikalischen Anwendungen. Mehr am Rande liegende Fragestellungen, die für das Verständnis des Ganzen unwesentlich sind und zum größten Teil Weiterführungen des geometrischen Inhaltes betreffen, sind im Text besonders gekennzeichnet.

Das Buch gliedert sich in mehrere, deutlich unterscheidbare Teile. Der erste Teil behandelt Tensoren im dreidimensionalen euklidischen Raum, ihre Algebra und Analysis sowie die Anwendungen dieser Kalküle auf die Mechanik fester und flüssiger Körper. Ein zweiter Abschnitt ist der Theorie des n-dimensionalen affinen und des n-dimensionalen euklidischen Raumes gewidmet, wobei auch die indefiniten Metriken betrachtet werden. Mehr am Rande werden dabei die grundlegende Theorie der geometrischen Objekte und die Theorie der Spinoren im vierdimensionalen Raum dargestellt. Die Ergebnisse dieses Abschnittes finden ihre Anwendung in der Behandlung der mathematischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie. Aus dem üblichen Rahmen dieser Darstellung sticht die Behandlung der *Dirac*'schen Wellengleichung des freien Elektrons hervor, ein Beispiel für eine Fragestellung der relativistischen Quantenmechanik. Nun erst kommen im dritten Abschnitt nach Einführung krummliniger Koordinaten zunächst im euklidischen und affinen Raum und einem Exkurs über den Begriff der Mannigfaltigkeit die Riemannschen Räume und die affin-zusammenhängenden Räume zu Wort. Hier werden auch die gewundenen affinen Zusammenhänge erwähnt. Über die Parallelverschiebung wird die absolute Differentiation eingeführt, sodann die Krümmungstheorie und die projektiven und konformen Abbildungen behandelt. An speziellen Problemen finden sich die Theorie der Kurven im Riemannraum sowie die Theorie der Hyperflächen der Klasse 1. Der letzte Abschnitt bildet eine kurze Darlegung der mathematischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie im üblichen Umfang.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß dieses in Diktion und Methodik meisterhafte Lehrbuch eine wertvolle Bereicherung der vom Deutschen Verlag der Wissenschaften herausgegebenen Reihe „Hochschulbücher für Mathematik" darstellt.

H. Brauner, Wien

Topologické Prostory. Von *E. Čech*. Mit Beiträgen von *J. Novák* und *M. Katětov*. 524 S. Praha: Nakladatelstvi Československé Akademie Věd. 1959. Kčs 38.—.

Der bekannte Topologe hat hier ein Buch über topologische Räume verfaßt, welches aus einem von ihm 1936 in Brünn gehaltenen Seminar hervorgegangen ist; es ist dem im Krieg umgekommenen *B. Pospíšil* gewidmet, über den auch ein Nachruf im Buche selbst beigeschlossen ist. Es ist dies ein sehr gründliches Werk,

welches aber nicht nur für den Fachmann auf diesem Gebiet von Nutzen sein wird, sondern auch demjenigen, der den Gegenstand nur studiert, um seine mathematische Allgemeinbildung zu vervollkommnen. Inhalt: 1. Mengen, Rechnen mit Mengen, Abbildungen; 2. Abzählbare Mengen, Mächtigkeiten; 3. Geordnete Mengen (Beweis des Wohlordnungssatzes, *Zorn*sches Lemma, transfinite Induktion usw.); 4. Topologische Räume und F-Räume; 5. Trennungsaxiome; 6. Spezielle topologische Räume; 7. Stetige Abbildungen; 8. Überdeckung eines Raumes oder einer Punktmenge durch ein System von Punktmengen; 9. Metrisierbare Räume; 10. Zusammenhängende Mengen; 11. Lokal zusammenhängende Mengen; 12. Einige neuere Ergebnisse. — Zwei Beiträge von *J. Novák* bzw. *M. Katetov* über die Konstruktion einiger besonderer topologischer Räume bzw. über vollständig normale (parakompakte) Räume (zusammen etwa 100 Seiten des Textes) vervollständigen das interessante Buch. Nach jedem Abschnitt sind in Kleindruck zahlreiche Übungen und Ergänzungen hinzugefügt und ein gründliches Sachregister (außer der Seitennummer wird sogar die Zeilennummer zitiert!) erleichtert die Übersicht. Sicher wird dieses schöne und originelle Buch viele Freunde gewinnen. *K. Prachar*, Wien

Die topologischen Dualitätssätze. 1. Abgeschlossene Mengen. Von *P. S. Alexandroff*. (Mathematische Forschungsberichte: Band VII.) 106 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Brosch. DM 16,80.

Dieses vorliegende Buch des bekannten Verfassers bringt die *Alexander-Pontrjagin*schen Dualitätssätze mit vollständigem Beweis, beginnend bei den ersten Anfängen der Homologie-Theorie der Komplexe, setzt also keinerlei Vorkenntnisse aus der Topologie voraus. Es werden auch z. B. die topologischen Invarianzsätze, der *Poincaré*sche Dualitätssatz vollständig bewiesen. Das Buch ist also gerade das Lehrbuch der Topologie, das von vielen Mathematikern schon lange gewünscht wurde, die nicht gerade Spezialisten in der Topologie werden wollen. Die Darstellung ist außerordentlich übersichtlich, so daß dieses Buch sehr zu empfehlen ist. *E. Hlawka*, Wien

Analysis of Straight-Line Data. Von *F. S. Acton*. (A Wiley Publication in Applied Statistics.) Mit 46 Textabb., XIII, 267 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. Geb. $ 9.—.

Das Buch enthält ein Teilgebiet der Statistik und zwar jenes, wo die gemessenen Daten ungefähr auf einer Geraden liegen. Dieser Fall, der natürlich in allen Lehrbüchern der Statistik vorkommt, aber kurz behandelt wird, wird hier ausführlich dargestellt. Das Buch gibt also eine detailierte Darstellung der klassischen und der modernen statistischen Verfahren für den obigen Spezialfall. Meist wird von Beispielen aus der Chemie ausgegangen und aus ihnen sodann allgemeine Verfahren gefolgert. Abgesehen von den üblichen Methoden zur Ermittlung der Parameter, zur Bestimmung von Konfidenzintervallen, zur Berechnung der Regression und der Varianzanalyse werden auch weniger bekannte Verfahren mitgeteilt. Es sind dies oft Methoden, die der Verfasser erprobt hat. Auch nichtparametrige Verfahren werden gebracht. Viel Wert wird auf praktische Rechenverfahren in der Statistik gelegt. Der Anhang bringt mehrere Tafeln, die der angewandte Statistiker gut brauchen kann. Das Buch ist besonders Chemikern, Physikern und Ingenieuren zu empfehlen, die praktische Statistik betreiben. *N. Hofreiter*, Wien

Operations Research, Methods and Problems. Von *M. Sasieni, A. Yaspan* und *L. Friedman.* Mit 46 Textabb., XI, 316 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. $ 10.25.

In den letzten Jahren erschien eine fast unübersehbare Anzahl von Arbeiten über Unternehmensforschung. Die meisten dieser Arbeiten können aber nur von Lesern mit Vorkenntnissen auf diesem Gebiet verstanden werden. Zur Einführung braucht man Bücher mit ausführlicher und leicht verständlicher Darstellung, die zahlreiche Beispiele mit durchgerechneten Lösungen enthalten. Ein solches Buch ist das vorliegende. Es beginnt mit einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, da die Elemente dieser Disziplinen im folgenden gebraucht werden. Die Autoren beschränken sich auf eine plausible Erklärung der Grundbegriffe wie zufällige Variable, Verteilungsfunktion, Stichprobenverteilungen, Parameterschätzungen. Dann folgen Kapitel aus der Unternehmensforschung. Die Titel lauten: Inventory.Replacement. Waiting Lines. Competetive Strategies (Spieltheorie). Allocation (Transportprobleme, Lineare Programme, Simplexmethode). Sequencing. Dynamic Programming. Jedes Kapitel enthält eine klare und einfache Darstellung der Theorie und der Methoden und eine große Anzahl von Aufgaben, die teilweise ausführlich durchgerechnet werden. Mathematisch betrachtet führen viele Aufgaben auf die Ermittlung von Maxima oder Minima, wobei aber Nebenbedingungen in der Form von Ungleichungen auftreten. Oft sind Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik heranzuziehen. Interessenten des Buches sind: Industriemathematiker, Statistiker und Volkswirtschaftler. *N. Hofreiter*, Wien

Strategy and Market Structure. Competition, Oligopoly, and the Theory of Games. Von *M. Shubik.* Mit 55 Textabb., XVIII, 387 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. $ 8.—.

Das Buch beginnt mit einem Vorwort von *O. Morgenstern.* Da es fast nur von Ökonometrie handelt, darf eine Besprechung in einer mathematischen Zeitschrift kurz sein. Die äußerst verschiedenartigen Fälle in der Ökonometrie erschweren eine einheitliche Darstellung. Es ist nicht leicht, eine Theorie zu finden, die genügend allgemein und praktisch brauchbar ist. Der Verfasser bespricht in dem Buch kritisch mehrere bisher aufgestellte Theorien und unternimmt den Versuch, mit Hilfe der neuen Theorie der Spiele ein mathematisches Modell für eine große Klasse von Problemen der Ökonometrie aufzustellen.

N. Hofreiter, Wien

Information Theory and Statistics. Von *S. Kullback.* (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) Mit 11 Textabb., XVII, 395 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1959. $ 12.50.

Die Informationstheorie ist vor etwa 10 Jahren durch die Arbeiten von *Shannon* zur Theorie der Nachrichtenübertragung und die in etwas anderer Richtung liegenden Arbeiten von *Wiener* begründet worden, wenn auch natürlich der Begriff der Entropie in der Thermodynamik schon lange bekannt war. Auch in der mathematischen Statistik wurde von *Fisher* 1925 ein Maß für die Information (über einen unbekannten Parameter) angegeben, welche in einer Stichprobe enthalten ist. Dennoch wurde die Verwendung eines Maßes für die Menge der Information bei Problemen der mathematischen Statistik vielleicht zunächst

etwas vernachlässigt, da man sich mehr mit den Anwendungen auf nachrichtentechnische Probleme beschäftigte, welche nun allerdings ziemlich erschöpft zu sein scheinen.

Im vorliegenden Buch werden dagegen erstmalig die mannigfachen statistischen Fragen behandelt, bei denen der Begriff der Information eine Rolle spielt. Bei der Grundlegung der Theorie wird vom Verfasser, etwas abweichend von der üblichen Definition, der Begriff „Informationsmaß für eine Entscheidung zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen mit Dichten $f_1(x)\mathrm{d}x$ bzw $f_2(x)dx$ bezüglich eines Maßes $m(x)$" verwendet.

Nachdem verschiedene Eigenschaften des Informationsmaßes dargelegt werden (Ungleichungen, asymptotische Beziehungen — auch der Zusammenhang mit der *Fisher*schen Informationsmatrix wird diskutiert), wird das interessante Problem der Schätzfunktionen für die Information besprochen, das vor allem in den Arbeiten des Verfassers untersucht wurde. Sodann folgt eine lange Reihe von Anwendungen auf so ziemlich alles, was in der mathematischen Statistik Rang und Namen hat, soweit es sich um Stichproben von festem Umfang handelt. Wir können hier davon nur einiges erwähnen: Multinomialverteilungen, *Poisson*verteilungen, Kontingenztafeln, die verschiedensten Fragen über mehrdimensionale Normalverteilungen und vieles andere. Interessante Übungsaufgaben nach jedem der dreizehn Kapitel bringen auch Ergänzungen zum Stoff. Im Anhang finden sich verschiedene Tafeln und ein dreizehn Seiten umfassendes Literaturverzeichnis.

Die Reichhaltigkeit des Buches ist so groß, daß man annehmen könnte, es wäre auf diesem Gebiet nun nichts Neues mehr zu finden. Das bahnbrechende Werk des Verfassers, welches auch zahlreiche originelle Beiträge enthält, läßt aber bei genauerem Zusehen erkennen, daß es hier noch viele interessante Dinge zu entdecken gibt. *K. Prachar*, Wien

4-stellige Zahlen- und Logarithmen-Tafeln. Zusammengestellt von *F. Raith* unter Mitwirkung von *H. Stocker*. 32 u. 6 S. Frankfurt am Main—Berlin—Bonn: Verlag M. Diesterweg. 1959. DM 4.—.

Ein sehr reichhaltiges Tafelwerk! Ein „Griffregister" ermöglicht ein rasches Aufschlagen der gewünschten Tafel. Die Logarithmentafeln sind u. a. durch die blaue Farbe des Papiers von den anderen Zahlentafeln abgehoben. Zu jeder Zahlentafel ist angegeben, in welchem Zahlenbereich die lineare Interpolation gestattet ist. Es ist sehr vorteilhaft, daß sich eine Zahlentafel nicht auf mehrere Seiten erstreckt; hat man eine solche Tafel aufgeschlagen, so braucht man bei ihrer Handhabung nicht mehr zu blättern. Um häufige Schülerfehler zu vermeiden, sind die Werte der Sinus (Kosinus)-Funktion sowie die Werte der Tangens (Kotangens)-Funktion in je einer eigenen Tafel aufgenommen. Die Unterteilung des (Alt)Grades erfolgt in Dezimalen. Der Druck ist vorbildlich.

Es wäre wegen der besseren Übersichtlichkeit wünschenswert, die Dezimalzahlen in der Tabelle der „wichtigen Zahlen" (Umschlagseite C) so anzuschreiben, wie es z. B. in der Tafel der Primzahlpotenzen (Umschlagseite D) geschehen ist. In der Tabelle der „nichtmetrischen Maße" ist bei den Gewichten das Gramm (g) durch das Pond (*p*) zu ersetzen. Es wäre vorteilhaft, eine Tabelle der Abzinsungsfaktoren aufzunehmen, denn die Tabelle der Kehrwerte genügt nicht, um einen Abzinsungsfaktor (auf vier Dezimalen genau) aus dem geeigneten Aufzinsungsfaktor zu berechnen. In der Tafel der „geographischen Koordinaten" sind z. B. geographische Länge und geographische Breite des Ortes Duala (Kamerun), des Flugplatzes auf Guam sowie des Flugplatzes Nome (Alaska) angegeben, nicht

aber die Koordinaten der Sternwarte in Wien bzw. des Flugplatzes Wien-Schwechat! Die Interpoliertafeln (Umschlagseite A und B) werden brauchbarer, wenn die Werte im Bereich $1 \leqq D \leqq 9$ auf 1 Dezimale genau angegeben werden, damit das „Zurückschlagen" eindeutig erfolgen kann. *J. Laub*, Wien

Wieso können Automaten rechnen? Von *B. A. Trachtenbrot*. Übersetzung aus dem Russischen. Mit 19 Textabb., 101 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Brosch. DM 3.60.

Dieses vorliegende Büchlein gibt eine Einführung in die Grundgedanken der elektronischen Rechenmaschinen, ihrer Anwendungen und ihrer prinzipiellen Schranken, indem es auch auf den Satz von *Church* in der Fassung von *Turing* eingeht. Das Werk ist sehr leicht zu lesen und kann auch unseren Mittelschullehrern für den Unterricht wärmstens empfohlen werden. *E. Hlawka*, Wien

Probability and Related Topics in Physical Sciences. Von *M. Kac*, mit speziellen Vorträgen von *G. E. Uhlenbeck*, *A. R. Hibbs*, *B. van der Pol*. (Lectures in Applied Mathematics, Proceedings of the Summer Seminar, Boulder, Colorado. 1957: Band I.) Mit 13 Textabb., XIII, 266 S. London—New York: Interscience Publishers. 1959. $ 5.60.

Der vorliegende Band umfaßt Vorträge von *M. Kac*, gehalten im Seminar für angewandte Mathematik in Boulder, Colorado, 1957, ergänzt durch vier Anhänge von *Uhlenbeck*, *Hibbs* und *van der Pol*. Diese Vorträge von *Kac* erscheinen mir die beste Einführung in die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die seit langem erschienen ist. Sie gliedern sich in vier Kapitel. Das erste behandelt die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und zwar werden sie sofort an nicht trivialen Beispielen erläutert, z. B. die mittlere Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten oder das Spiel „Kopf oder Adler". Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der „Technik" der Wahrscheinlichkeitstheorie. Es wird also erläutert, wie man Probleme, wie sie z. B. durch die Physik (z. B. statistische Verteilung der Länge eines Gummimoleküls) gegeben werden, anpackt. Das dritte Kapitel behandelt die klassische statistische Mechanik, insbesondere die *Boltzmann*-Gleichung und die vom Verfasser entwickelte master equation. Es ist dies eine der schönsten Einführungen in die Grundgedanken der statistischen Mechanik. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Integration in Funktionenräumen, also mit dem *Wiener*-Integral, und ihren Anwendungen und zeigt, wie man tiefliegende Resultate der klassischen Analysis, die mit Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nichts zu tun zu haben scheinen, elegant mit dem *Wiener*-Integral herleiten kann.

Die ersten beiden Anhänge beschäftigen sich mit der *Boltzmann*-Gleichung, mit dem *Feynman*-Integral, die letzten zwei Anhänge von *Pol* mit „Glätten" und „Unglätten" von Beobachtungen und mit den Differenzengleichungen zur Wellengleichung und Potentialgleichung. *E. Hlawka*, Wien

Méthodes mathématiques de la mécanique statistique. Von *A. Blanc-Lapierre*, *P. Casal* und *A. Tortrat*. (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens.) Mit 12 Textabb., X, 180 S. Paris: Masson et Cie. 1959. ffr. 3800.—.

Die vorliegende Monographie ist aus Vorträgen und Diskussionen innerhalb eines Seminars über statistische Mechanik, das das Institut für theoretische Physik der Universität Algier in den Studienjahren 1955/56 und 1956/57 veranstaltete, hervorgegangen. Dieses Seminar hatte das Ziel, die mathematischen

Prinzipien der statistischen Mechanik ausführlich zu erörtern und die vorliegende Monographie ist das aus diesen Diskussionen hervorgegangene gemeinsame Werk der an den Diskussionen beteiligten Mathematiker und Physiker. Die dabei auftretenden Problemkreise sind die mit der Ergodenhypothese und die mit dem Problem der asymptotischen Wahrscheinlichkeiten verknüpften Fragestellungen. In den beiden einleitenden Kapiteln I und II werden zunächst die Grundlagen der statistischen Mechanik, wie Phasenraum, *Lagrange-* und *Hamiltonsche* Gleichungen, *Liouvillesches* Theorem usw. auseinandergesetzt. Daraufhin folgen in dem Kapitel III die *Birkhoffschen* und *Neumannschen* Theoreme, die es gestatten, der Ergodenhypothese eine exakte mathematische Formulierung zu geben. Kap. IV beinhaltet eine Anwendung der so gewonnenen Ergebnisse auf die Fragestellung der klassischen statistischen Mechanik, Kap. V auf die statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Bei beiden Problemkreisen spielen asymptotische Wahrscheinlichkeiten eine entscheidende Rolle. In dem mathematischen Anhang werden die im Text benützten Sätze über Maß und Integrabilität und einige topologische Definitionen zusammengestellt. Für alle an einer exakten mathematischen Grundlegung der statistischen Mechanik interessierten Physiker dürfte sich diese ausgezeichnete Monographie wohl als unentbehrlich erweisen. *Th. Sexl*, Wien

Theorie der Stabilität einer Bewegung. Von *J. G. Malkin.* In deutscher Sprache herausgegeben von *W. Hahn* und *R. Reissig.* Mit 20 Textabb., XIII, 402 S. München: Verlag R. Oldenbourg. 1959. Geb. DM 47.—.

Im Jahre 1892 erschien die Dissertation von *A. M. Ljapunow:* „Das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung". Die in dieser Arbeit enthaltene Definition der Stabilität einer Bewegung wurde der Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen zur Theorie der Stabilität einer Bewegung. Wird die Bewegung eines beliebigen dynamischen Systems durch ein System von simultanen, gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Normalform beschrieben:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wo t die Zeit und y_i Parameter bedeuten, die die Bewegung des mechanischen Systems charakterisieren (z. B. Koordinaten, Geschwindigkeiten oder Funktionen dieser Größen), so lautet die *Ljapunow*sche Definition der Stabilität folgendermaßen: Die ungestörte Bewegung $y = f_i(t, t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ heißt stabil bezüglich der Größen y_i, wenn sich zu jeder positiven Größe ε, wie klein sie auch sei, eine andere positive Größe $\eta(\varepsilon)$ derart angeben läßt, daß für alle gestörten Bewegungen $y_i = y_i(t)$, bei denen zur Zeit $t = t_0$ die Ungleichungen $| y_i(t_0) - f_i(t_0) | \leqq \eta$ gelten, für alle $t > t_0$ die Ungleichungen $| y_i(t) - f_i(t) | < \varepsilon$ erfüllt sind.

Die *Ljapunow*sche Definition erwies sich in der Folgezeit als außerordentlich fruchtbar. Mit der Ausarbeitung der Theorie beschäftigten sich vorwiegend russische Mathematiker und die fast ausschließlich russisch geschriebenen Abhandlungen sind außerhalb des russischen Sprachgebietes wenig bekannt geworden. Es ist daher ein großes Verdienst des russischen Autors *J. Malkin* und seiner deutschen Übersetzer *Hahn* und *Reissig*, die weit entwickelte Theorie in einem ausführlichen, nicht allzu schwierig geschriebenen Lehrbuch auch dem deutschen Leserpublikum zugänglich gemacht zu haben. Auf insgesamt 400 Seiten werden die Grundbegriffe und Definitionen der Stabilitätsuntersuchungen für stationäre Bewegungen und das Auftreten kritischer Fälle bei solchen Bewegungen, ferner die Stabilität periodischer Bewegungen und schließlich die

Stabilitätsuntersuchungen nichtstationärer Bewegungen dargelegt. Die Theorie wird ständig durch erläuternde Beispiele ergänzt. Da die in dem Lehrbuch dargestellten Methoden neuerdings auch in steigendem Maße von Physikern und Ingenieuren in Forschung und technischen Entwicklungsarbeiten benützt werden, darf dem wertvollen Buche eine große Verbreitung bei den interessierten Kreisen vorausgesagt und gewünscht werden. *Th. Sexl*, Wien

Theory of Relativity. Von *W. Pauli*. Übersetzung aus dem Deutschen von *G. Field*. Mit ergänzenden Bemerkungen des Autors. Mit 4 Textabb., XIV, 241 S. London—New York—Paris—Los Angeles: Pergamon Press. 1958. Geb. 35 s.

Im jugendlichen Alter von 20 Jahren — noch als Student — hatte *W. Pauli* seinen später berühmt gewordenen Artikel im Band V der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften geschrieben, der auch gesondert in Buchform mit einem Vorwort von *A. Sommerfeld* im Jahre 1921 erschien. Wenn jetzt 37 Jahre später dieser Artikel neuerdings in Buchform, diesesmal in englischer Übersetzung von *G. Field* erscheint, so beweist dies, in welch gültiger Form die seinerzeitige Darstellung des Standes der Relativitätstheorie gelungen war. Seit 1921 erschien eine wahre Flut von Abhandlungen und Büchern über Relativitätstheorie. Diese vollständig zu berücksichtigen, erschien vollständig aussichtslos. *W. Pauli* beschränkte sich daher darauf, in einer Reihe von Zusätzen am Ende des Buches die seit 1921 erfolgte Weiterentwicklung der Relativitätstheorie (kosmologisches Problem, einheitliche Feldtheorie) zusammenzustellen, wobei seine persönlichen Ansichten über strittige Fragen dieser Weiterentwicklung das besondere Interesse der Leser finden werden. Übersetzung, Druck und Ausstattung des Werkes sind hervorragend. *Th. Sexl*, Wien

La dynamique relativiste et ses applications. Band II: Problèmes de mouvement en dynamique du point faiblement accéléré. Von *H. Arzeliès* unter der Mitarbeit von *R. Mendez*. (Études Relativistes.) Mit 188 Textabb., XXXIV, 451 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. Brosch. ffr. 6000.—; $ 12.46.

Im Jahre 1955 erschien vom gleichen Verfasser im gleichen Verlag als erster Band einer den Anwendungen des speziellen Relativitätsprinzips gewidmeten Serie eine Darstellung der speziellen Relativitätstheorie. Als Fortsetzung erschien 1957 als erster Teil einer der relativistischen Dynamik und ihrer Anwendungen gewidmeten Darstellung eine ausführlich und klar geschriebene Dynamik eines langsam bewegten Massenpunktes, wobei auch moderne Gesichtspunkte der Feldtheorie berücksichtigt wurden. Der nunmehr vorliegende zweite Teil dieser relativistischen Dynamik ist insbesondere der Elektrodynamik von *Maxwell* und *Lorentz* gewidmet und behandelt in ausführlichster Weise, auf XIII Kapitel verteilt, alle einschließlichen Probleme. Daran schließen sich noch einige kinematische Ausführungen über die Bewegung von Massenpunkten auf Flächen und Kurven, eine gelungene Darstellung des relativistischen elastischen Stoßes zweier Teilchen, eine Behandlung des *Compton*effektes und schließlich noch eine Darstellung des nichtelastischen Stoßes mit Anwendungen in der Kernphysik. Der Autor hat sich insbesondere um eine Darstellung bemüht, die die Lektüre jedes einzelnen Kapitels für sich gestattet, was die praktische Brauchbarkeit des Buches außerordentlich erhöhen dürfte. Besonders wertvoll sind auch —wie schon im ersten Bande — die historischen Bemerkungen und die ausführlichen Literaturangaben, die jedem einzelnen Kapitel beigegeben sind. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Acta Physica Austriaca. Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **Fritz Regler**, Wien, und **Hans Thirring**, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Zuletzt erschien:

Band 12, Heft 4, Schlußheft. (Abgeschlossen im August 1959.) Mit 60 Textabbildungen. 176 Seiten. 1959. S 264.—, DM 44.—, sfr. 45.—, $ 10.50

Inhaltsverzeichnis: **Karlik, B.,** und **E. Schmid.** Karl Przibram - 80 Jahre. — **Frisch, O. R.** Betrachtungen zur kohärenten Bremsstrahlung. — **Blau, M.** Ionisationsmessungen in photographischen Emulsionen. — **Adler, H.** Zur Thermoluminiszenz der Seltenen Erden in CaF_2. — **Krzywoblocki, M. Z. v.,** and **F. H. Bergonz.** On Some Problems of Heat Transfer in Free Molecule Flow. — **Franz, A.** Konzentrierung von Elektronenstrahlen niedriger Spannung und hoher Stromstärke mit Hilfe eines elektrischen Feldes in Helium. — **Mayer, H.** Bestimmung charakteristischer Größen der Metallelektronen mit der Methode dünner Schichten. — **Schneider, W.** Ein Laufzeitkettenverstärker für kernphysikalische Koinzidenzmessungen. — **Zingl, H.** Streuung schneller Elektronen am Deuteron. — **Hanke, L.** Delbrück-Streuung am homogenen Magnetfeld. — **Pucker, N.** Zur Theorie des Ionenstrahls in elektrostatischen Feldern mit Berücksichtigung der Raumladung. — **Buchbesprechungen.**

Vom Ursprung und Ende der Metaphysik.

Eine Studie zur Weltanschauungskritik. Von **Ernst Topitsch**, Professor an der Universität Wien. IV, 320 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 156.—, DM 26.—, sfr. 26.60, $ 6.20

„... *Topitsch* versucht in seiner von immensem Wissen gestützten Untersuchung ‚Ursprung und Ende der Metaphysik' nichts Geringeres, als jedem Idealismus, jedem weltanschaulichen und politischen Programm die Möglichkeit zu nehmen, sich auf metaphysische und naturrechtliche Gewißheiten zu berufen. Er weist in scharfsinnigen, über eine imponierende Fülle von Material verfügenden Darstellungen von Mythen, politischen und philosophischen Weltbildern nach, daß in den meisten Fällen mit ‚Leerformeln' gearbeitet wird, denen sich beliebige Inhalte unterlegen lassen. Es handle sich zumeist um eine ‚wertende Deutung der Welt nach dem Modell des menschlichen Handelns und die Rückbeziehung des so entstandenen Weltbildes auf unser Werten und Tun', wodurch dann ohne weiteres das Pathos höherer Berufung und Sendung für rein praktische Interessen in Anspruch genommen werden kann. Auch die Inhalte des Naturrechtes seien sehr variabel, abhängig von Zeit, Ort und konkreter Gegebenheit, doch dienten sie allzuoft zur Rechtfertigung willkürlicher machtpolitischer Maßnahmen ... Es handelt sich hier um eines der bedeutendsten philosophischen Dokumente der jüngeren Generation, die den wiederholten Mißbrauch verschiedenster Ideale mitangesehen hat, und niemand, der sich fachlich mit dem Geistigen in unserer Zeit beschäftigt, wird daran vorbeigehen können."

Saarbrücker Zeitung

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit

Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung

Von

Dr. Dr. Wolfgang Stegmüller

o. Professor an der Universität München

III, 114 Seiten Gr.-8°. 1959

Steif geheftet S 118.80, DM 19.80, sfr. 20.30, $ 4.70

Die Theoreme von *K. Gödel* und *A. Church* gehören neben gewissen später gewonnenen Verallgemeinerungen zu den wichtigsten Erkenntnissen der logisch-mathematischen Grundlagenforschung dieses Jahrhunderts. Moderne Darstellungen der genannten Resultate liegen fast nur in Fremdsprachen vor und sind außerdem von einem sehr hohen Schwierigkeitsgrade, so daß ein Verständnis in weiteren Kreisen bisher nicht möglich war.

In dem vorliegenden Buch ist der Verfasser bemüht, den Leser in diese metamathematischen Probleme und ihre Lösungen in möglichst kurzer und übersichtlicher Weise einzuführen. Die Beweise sind bis auf die Weglassung geringfügiger Details vollständig. Neben der Darstellung technischer Einzelheiten wird im Text die erkenntnistheoretische Bedeutung der einzelnen Ergebnisse diskutiert. Für das Studium des Buches werden nur elementare logistische Kenntnisse vorausgesetzt. Spezielles mathematisches und metamathematisches Wissen ist nicht erforderlich.

Inhaltsverzeichnis: **Einleitung.** — **Intuitiver Zugang zum *Gödel*schen Unvollständigkeitstheorem: Die Antinomie von *Richard*.** — **Die *Gödel*schen Theoreme.** Das formale System **ZL.** Die Theoreme von *Gödel*. Primitiv rekursive Funktionen und Prädikate. Die Arithmetisierung der Metatheorie. — **Die Unentscheidbarkeit der Quantifikationstheorie (Theorem von *Church*).** Allgemein-rekursive Funktionen. Der Gleichungskalkül von *Kleene*. Die schematische Funktionentheorie von *Quine*. Das Theorem von *Church* (nach *Quine*). — **Die Verallgemeinerungen von *Kleene*.** Das *Kleene*sche *T*-Prädikat. Das Aufzählungstheorem und seine Konsequenzen. Das Normalformentheorem. Algorithmische Theorien und das Theorem von *Church* in der Fassung von *Kleene*. Rekursive Aufzählbarkeit, Beweisverfahren und das verallgemeinerte *Gödel*sche Theorem. Die symmetrische Form des verallgemeinerten *Gödel*schen Theorems und die Unentscheidbarkeit der elementaren Zahlentheorie. Zusammenfassung. — **Anhang.** Die *Gödel*sche β-Funktion. Primitiv rekursive und arithmetische Prädikate und der zahlentheoretische Formalismus. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung